


**Государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования Московской области
«Университет «Дубна»
(государственный университет «Дубна»)**



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебно-методической работе

 / А.С. Деникин

« _____ » _____ 2021 г.

**ПРОГРАММА
ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ
ПО ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОМУ ПРЕДМЕТУ
«МАТЕМАТИКА»**

г. Дубна, 2021г.

Кавеншивили Михаил Петрович
Кавенши 12.05.2021.

Программа вступительных испытаний по математике

Настоящая программа состоит из трех разделов.

В первом разделе перечислены основные математические понятия, которыми должен владеть поступающий.

Второй раздел представляет собой перечень вопросов теоретической части экзамена. При подготовке к экзамену целесообразно ознакомиться с формулировками утверждений этого раздела.

В третьем разделе указано, какие навыки и умения требуются от поступающего на экзаменах.

Объем знаний и степень владения материалом, описанным в программе, соответствуют курсу математики средней школы. Поступающий может пользоваться всем арсеналом средств из этого курса, включая и начала анализа. Однако для решения экзаменационных задач достаточно уверенного владения лишь теми понятиями и их свойствами, которые перечислены в настоящей программе. Объекты и факты, не изучаемые в общеобразовательной школе, также могут использоваться поступающими, но при условии, что он способен их пояснять и доказывать.

В связи с обилием учебников и регулярным их переизданием отдельные утверждения второго раздела могут в некоторых учебниках называться иначе, чем в программе, или формулироваться в виде задач, или вовсе отсутствовать. Такие случаи не освобождают поступающего от необходимости знать эти утверждения.

I. Основные понятия

1. Натуральные числа. Делимость. Простые и составные числа. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.
2. Целые, рациональные и действительные числа. Проценты. Модуль числа, степень, корень, арифметический корень, логарифм. Синус, косинус, тангенс, котангенс числа (угла). Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс числа.
3. Числовые и буквенные выражения. Равенства и тождества.
4. Функция, ее область определения и область значений. Возрастание, убывание, периодичность, четность, нечетность. Наибольшее и наименьшее значения функции. График функции.
5. Линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические функции.
6. Уравнение, неравенства, система. Решения (корни) уравнения, неравенства, системы. Равносильность.
7. Арифметическая и геометрическая прогрессии.
8. Прямая на плоскости. Луч, отрезок, ломаная, угол.
9. Треугольник. Медиана, биссектриса, высота.
10. Выпуклый многоугольник. Квадрат, прямоугольник, параллелограмм, ромб, трапеция. Правильный многоугольник. Диагональ.

11. Окружность и круг. Радиус, хорда, диаметр, касательная, секущая. Дуга окружности и круговой сектор. Центральный и вписанные углы.
12. Прямая и плоскость в пространстве. Двугранный угол.
13. Многогранник. Куб, параллелепипед, призма, пирамида.
14. Цилиндр, конус, шар, сфера.
15. Равенство и подобие фигур. Симметрия.
16. Параллельность и перпендикулярность прямых, плоскостей. Скрещивающиеся прямые. Угол между прямыми, плоскостями, прямой и плоскостью.
17. Касание. Вписанные и описанные фигуры на плоскости и в пространстве. Сечение фигуры плоскостью.
18. Величина угла. Длина отрезка, окружности и дуги окружности. Площадь многоугольника, круга и кругового сектора. Площадь поверхности и объем многогранника, цилиндра, конуса, шара.
19. Координатная прямая. Числовые промежутки. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Векторы.

II. Содержание теоретической части экзамена

Алгебра

1. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10.
2. Свойства числовых неравенств.
3. Формулы сокращенного умножения.
4. Свойства линейной функции и ее график.
5. Формула корней квадратного уравнения. Теорема о разложении квадратного трехчлена на линейные множители. Теорема Виета.
6. Свойства квадратичной функции и ее график.
7. Неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел.
8. Формулы общего члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии.
9. Формулы общего члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии.
10. Свойства степеней с натуральными и целыми показателями. Свойства арифметических корней n -й степени. Свойства степеней с рациональными показателями.
11. Свойства степенной функции с целым показателем и ее график.
12. Свойства показательной функции и ее график.
13. Основное логарифмическое тождество. Логарифмы произведения, степени, частного. Формула перехода к новому основанию.
14. Свойства логарифмической функции и ее график.
15. Основное тригонометрическое тождество. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Формулы приведения, сложения, двойного и половинного аргумента, суммы и разности тригонометрических функций. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму. Преобразование выражения $a \sin x + b \cos x$ с помощью вспомогательного аргумента.
16. Формулы решений простейших тригонометрических уравнений.
17. Свойства тригонометрических функций и их графики.

Геометрия

1. Теоремы о параллельных прямых на плоскости.

2. Свойства вертикальных и смежных углов.
3. Свойства равнобедренного треугольника.
4. Признаки равенства треугольников.
5. Теорема о сумме внутренних углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника. Свойства средней линии треугольника.
6. Теорема Фалеса. Признаки подобия треугольников.
7. Признаки равенства и подобия прямоугольных треугольников. Пропорциональность отрезков в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора.
8. Свойство серединного перпендикуляра к отрезку. Свойство биссектрисы угла.
9. Теоремы о пересечении медиан, пересечении биссектрис и пересечении высот треугольника.
10. Свойство отрезков, на которые биссектриса треугольника делит противоположную сторону.
11. Свойство касательной к окружности. Равенство касательных, проведенных из одной точки к окружности. Теоремы о вписанных углах. Теорема об угле, образованном касательной и хордой. Теоремы об угле между двумя пересекающимися хордами и об угле между двумя секущими, выходящими из одной точки. Равенство произведений отрезков двух пересекающихся хорд. Равенство квадрата касательной произведению секущей на ее внешнюю часть.
12. Свойство четырехугольника, вписанного в окружность. Свойство четырехугольника, описанного около окружности.
13. Теорема об окружности, вписанной в треугольник. Теорема об окружности, описанной около треугольника.
14. Теоремы синусов и косинусов для треугольника.
15. Теорема о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника.
16. Признаки параллелограмма. Свойства параллелограмма.
17. Свойства средней линии трапеции.
18. Формула для вычисления расстояния между двумя точками на координатной плоскости. Уравнение окружности.
19. Теоремы о параллельных прямых в пространстве. Признак параллельности прямой и плоскости. Признак параллельности плоскостей.
20. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Теорема об общем перпендикуляре к двум скрещивающимся прямым. Признак перпендикулярности плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

III. Требования к поступающему

На экзамене по математике поступающий должен уметь:

1. выполнять (без калькулятора) действия над числами и числовыми выражениями; преобразовывать буквенные выражения; производить операции над векторами (сложение, умножение на число, скалярное произведение); переводить одни единицы измерения величин в другие;
2. сравнивать числа и находить их приближенные значения (без калькулятора); доказывать тождества и неравенства для буквенных выражений;
3. решать уравнения, неравенства, системы (в том числе с параметрами) и исследовать их решения;
4. исследовать функции; строить графики функций и множества точек на координатной плоскости, заданные уравнениями и неравенствами;

5. изображать геометрические фигуры на чертеже; делать дополнительные построения; строить сечения; исследовать взаимное расположение фигур; применять признаки равенства, подобия фигур и их принадлежности к тому или иному виду;
6. пользоваться свойствами чисел, векторов, функций и их графиков, свойствами арифметической и геометрической прогрессий;
7. пользоваться свойствами геометрических фигур, их характерных точек, линий и частей, свойствами равенства, подобия и взаимного расположения фигур;
8. пользоваться соотношениями и формулами, содержащими модули, степени, корни, логарифмические, тригонометрические выражения, величины углов, длины, площади, объемы;
9. составлять уравнения, неравенства и находить значения величин, исходя из условия задачи;
10. излагать и оформлять решение логически правильно, полно и последовательно, с необходимыми пояснениями.
На устном экзамене поступающий должен дополнительно уметь:
11. давать определения, формулировать и доказывать утверждения (формулы, соотношения, теоремы, признаки, свойства и т.п.), указанные во втором разделе настоящей программы;
12. анализировать формулировки утверждений и их доказательства;
13. решать задачи на построение циркулем, линейкой; находить геометрические места точек.

2. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

2.1. Модуль действительного числа

По определению:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Свойства модуля действительного числа:

$$\begin{aligned} |-a| &= |a|, \quad |a|^2 = a^2, \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \\ \left| \frac{a}{b} \right| &= \frac{|a|}{|b|}, \quad |a+b| \leq |a| + |b|, \quad |a-b| \geq |a| - |b|. \end{aligned}$$

Свойства неравенств:

$$|x| \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a, \\ x \geq -a, \end{cases} \quad |x| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a, \\ x \leq -a. \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \neq 1.$$

2.2. Свойства степеней

Арифметическим корнем степени $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) из неотрицательно-го числа a называется неотрицательное число b такое, что $b^n = a$. Обозначается $\sqrt[n]{a} = b$.

По определению.

Пусть $a > 0$, тогда

$$a^0 = 1; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad n \neq 1.$$

Свойства арифметических корней.

Пусть $a \geq 0, b > 0, n \in \mathbb{N}, n \neq 1, m \in \mathbb{N}, m \neq 1$, тогда

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}.$$

Свойства действительных степеней.

Пусть $a > 0$, $b > 0$, тогда

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, (a^x)^y = a^{xy}, a^x \cdot b^x = (ab)^x,$$

$$x \cdot \sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{x^2 \cdot b}, & \text{если } x \geq 0, \\ -\sqrt{x^2 \cdot b}, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

2.3. Формулы сокращенного умножения

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b),$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3,$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot (a^2 \mp ab + b^2).$$

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b) \cdot (a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab, \quad a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab.$$

2.4. Рациональные уравнения

Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$; a , b , c - действительные

числа, вычисляются по формуле: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Теорема Виета.

Сумма корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна $-\frac{b}{a}$, а произведе-

ние $\frac{c}{a}$, т.е.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a, \\ x_1 \cdot x_2 = c/a. \end{cases}$$

Разложение на множители.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

2.5. Логарифмы

Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называется показатель степени x , в которую нужно возвести a , чтобы получить число b . Обозначается $x = \log_a b$.

По определению.

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1.$$

Основное логарифмическое тождество.

$$a^{\log_a b} = b, \quad \log_a a^b = b.$$

Основные свойства логарифмов:

1. $\log_a x_1 x_2 = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|$, $x_1 x_2 > 0$,
2. $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|$, $\frac{x_1}{x_2} > 0$,
3. $\log_a x^p = p \log_a x$, $x > 0$, ($\log_a x^2 = 2 \log_a |x|$, $x \neq 0$),
4. $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$,
5. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$,
6. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $c > 0$, $c \neq 1$.

2.6. Прогрессии

Арифметической прогрессией называется такая числовая последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, постоянным для этой последовательности. Это число называется разностью прогрессии и обозначается d .

По определению.

$$a_k = a_{k-1} + d = a_1 + (k-1)d, \quad k \in N, \quad k > 1.$$

Сумма n членов арифметической прогрессии.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n.$$

Признак арифметической прогрессии.

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \quad k \in N, \quad k > 1.$$

Геометрической прогрессией называется такая числовая последовательность: $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$, в которой первый член отличен от нуля, а каждый из последующих равен предыдущему, умноженному на некоторое число, отличное от нуля. Это число называется знаменателем прогрессии и обозначается q .

По определению.

$$b_k = b_{k-1} \cdot q = b_1 \cdot q^{k-1}, \quad k \in N, \quad k > 1.$$

Сумма n членов геометрической прогрессии.

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1 \quad (\text{при } q=1, S_n = b_1 n).$$

Признак геометрической прогрессии.

$$b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad S - \text{сумма прогрессии, } |q| < 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

2.7. Тригонометрия

Функции одного и того же угла:

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad 2. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$3. \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1. \quad 4. 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

$$5. 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad 6. \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

$$7. \cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

Формулы сложения:

$$1. \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

$$2. \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

$$3. \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Формулы двойных, половинных, тройных углов:

$$1. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$2. \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$3. \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$4. \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

$$5. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Преобразование суммы функций в произведение:

$$1. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$2. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$3. \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$4. \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$5. \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}.$$

Преобразование произведений функций:

$$1. \cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

$$2. \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

$$3. \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

Понижение степени:

$$1. \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha), \quad 2. \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha).$$

$$3. \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

Значение тригонометрических функций некоторых углов.

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	-	0	-

Простейшие тригонометрические уравнения.

$$1. \sin x = a, \quad |a| \leq 1, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \quad \arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$2. \cos x = a, |a| \leq 1, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in Z;$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a, \quad \arccos x \in [0, \pi].$$

$$3. \operatorname{tg} x = a, \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi l, \quad l \in Z,$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a, \quad \operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$4. \operatorname{ctg} x = a, \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi m, \quad m \in Z;$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a, \quad \operatorname{arcctg} a \in (0, \pi).$$

Частные случаи:

$$\left. \begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \operatorname{tg} x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \pi n, \quad n \in Z, \quad \left. \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \operatorname{ctg} x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z,$$

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z, \quad \cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in Z,$$

$$\sin x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z, \quad \cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

2.8. Планиметрия

Пусть:

S – площадь,

a, b, c – стороны треугольника,

α, β, γ – противоположные углы,

p – полупериметр,

R – радиус описанной окружности,

r – радиус вписанной окружности,

h_a – высота, проведенная к стороне a ,

m_a – медиана, проведенная к стороне a .

Треугольник.

а) *Медианы* треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

б) **Биссектрисы** пересекаются в одной точке, являющейся центром окружности, вписанной в треугольник.

Биссектриса угла треугольника делит сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам.

в) **Средняя линия** треугольника параллельна третьей стороне и длина ее равна половине длины третьей стороны.

г) **Теорема синусов**

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

д) **Теорема косинусов**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

е) **Площадь**

$$S = \frac{1}{2} ah_a, \quad S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha, \quad S = rp,$$

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

ж) **Площадь** равностороннего треугольника

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Прямоугольный треугольник:

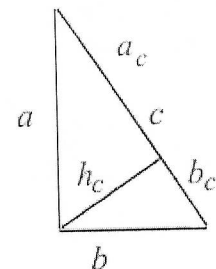
а) **Теорема Пифагора** $c^2 = a^2 + b^2$.

б) $r = \frac{a+b-c}{2}, \quad R = \frac{c}{2}$.

в) $a^2 = ca_c, \quad b^2 = cb_c, \quad h_c^2 = a_c b_c$

Выпуклый четырехугольник:

а) $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi,$



где d_1, d_2 – диагонали четырехугольника, φ – угол между ними.

б) Вокруг выпуклого четырехугольника можно *описать* окружность тогда и только тогда, когда сумма любых двух его противоположных углов равна 180° .

в) В выпуклый четырехугольник можно *вписать* окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

Ромб.

$$S = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

Параллелограмм.

а) $2(a^2 + b^2) = d_1^2 + d_2^2$, где a и b стороны параллелограмма, d_1 и d_2 – его диагонали.

$$\text{б) } S = ab \sin \alpha = ah_a = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

Сектор.

а) $l = r\alpha$, где l – длина дуги сектора, α – радианная мера центрального угла.

$$\text{б) } S = \frac{1}{2} r^2 \alpha.$$

Трапеция.

а) $l = \frac{a+b}{2}$, где l – средняя линия трапеции.

$$\text{б) } S = \frac{a+b}{2} h.$$

Теоремы о произведениях отрезков секущих:

а) Если из точки S вне окружности проведена касательная ST (T – точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках A и B , то $SA \cdot SB = ST^2$.

б) Если две прямые, проходящие через точку S , пересекают окружность в точках A и B , C и D соответственно, то $SA \cdot SB = SC \cdot SD$.

2.9. Стереометрия

Пусть:

l – боковое ребро,

P – периметр основания,

H – высота,

V – объем,

S – площадь основания,

$S_{\text{бок}}$ – площадь боковой поверхности.

Призма.

$$V = SH, \quad S_{\text{бок}} = P_{\text{сеч}} \cdot l,$$

где $P_{\text{сеч}}$ – периметр сечения, перпендикулярного боковому ребру l .

Параллелепипед (прямоугольный).

$$V = abc, \quad S_{\text{бок}} = P \cdot H, \quad d^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

где d – диагональ параллелепипеда.

Пирамида.

$$а) V = \frac{1}{3}SH.$$

б) Если в пирамиде все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды.

в) Если в пирамиде все боковые грани образуют с основанием равные углы, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды.

г) Правильная пирамида.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}Ph_a,$$

где h_a – апофема (высота боковой грани).

Усеченная пирамида.

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h_a,$$

где P_1, P_2 – периметры оснований.

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}),$$

где S_1 и S_2 – площади оснований пирамиды.

Цилиндр.

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH, \quad V = \pi R^2 H,$$

где R – радиус основания.

Конус.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H, \quad S_{\text{бок}} = \pi RL,$$

где L – образующая.

Усеченный конус.

$$S_{\text{бок}} = \pi(R_1 + R_2)L,$$

где R_1 и R_2 – радиусы оснований, нижнего и верхнего соответственно.

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2).$$

Шар.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2,$$

где R – радиус шара.

3. РЕШЕНИЕ И ОФОРМЛЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

1. Найти 40% от числа: $3\frac{1}{8} + \left(2\frac{1}{5} - \frac{3}{4}\right) : 1,6$.

Решение. Выполним вычисления по действиям.

$$1) 2\frac{1}{5} - \frac{3}{4} = \frac{11}{5} - \frac{3}{4} = \frac{11 \cdot 4 - 3 \cdot 5}{20} = \frac{44 - 15}{20} = \frac{29}{20}.$$

$$2) \left(2\frac{1}{5} - \frac{3}{4}\right) : 1,6 = \frac{29}{20} : \frac{16}{10} = \frac{29}{20} \cdot \frac{10}{16} = \frac{29}{32}.$$

$$3) 3\frac{1}{8} + \left(2\frac{1}{5} - \frac{3}{4}\right) : 1,6 = \frac{25}{8} + \frac{29}{32} = \frac{25 \cdot 4 + 29}{32} = \frac{129}{32}.$$

Чтобы найти 40% от числа $\frac{129}{32}$ составим и решим пропорцию:

$$\frac{\frac{129}{32} - 100\%}{x - 40\%}, \text{ откуда } x = \frac{129 \cdot 40}{32 \cdot 100} = \frac{129}{80} = 1\frac{49}{80}. \text{ Ответ: } 1\frac{49}{80}.$$

2. Вычислить без таблиц и калькулятора:

$$\frac{\lg 75 - \frac{1}{2} \lg 9}{\lg 125} \cdot \log_{16} \left(3^{\log_{1/3}(1/4)} \right) \cdot \left(5^{-1} + 16^{3/4} \right).$$

Решение. Выполним вычисления по действиям.

$$1) \frac{\lg 75 - \frac{1}{2} \lg 9}{\lg 125} = \frac{\lg 75 - \lg 9^{1/2}}{\lg 125} = \frac{\lg 75 - \lg 3}{\lg 125} = \frac{\lg(75/3)}{\lg 125} = \frac{\lg 5^2}{\lg 5^3} = \frac{2 \lg 5}{3 \lg 5} = \frac{2}{3}.$$

$$2) \log_{16} \left(3^{\log_{1/3}(1/4)} \right) = \log_{16} \left(3^{\log_3 4} \right) = \log_{16} 4 = \frac{1}{2}.$$

$$3) 5^{-1} + 16^{3/4} = \frac{1}{5} + \left(\sqrt[4]{16} \right)^3 = \frac{1}{5} + 8 = \frac{41}{5}.$$

$$\text{Окончательно имеем: } \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{41}{5} = \frac{41}{15}. \text{ Ответ: } \frac{41}{15}.$$

Были использованы основные свойства логарифмов:

$$1) \log_a x_1 x_2 = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|, x_1 x_2 > 0,$$

$$2) \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|, \frac{x_1}{x_2} > 0,$$

$$3) \log_a x^p = p \log_a x, x > 0, 4) \log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b,$$

$$5) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, 6) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, c > 0, c \neq 1.$$

3. Упростить выражение: $\left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1\right).$

Решение.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{\sqrt{1+a}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1\right) = \left(\frac{3 + \sqrt{1-a}\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}}\right) : \left(\frac{3 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a^2}}\right) = \\ & = \frac{3 + \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a}} \cdot \frac{\sqrt{1-a^2}}{3 + \sqrt{1-a^2}} = \frac{(3 + \sqrt{1-a^2}) \cdot \sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+a} \cdot (3 + \sqrt{1-a^2})} = \frac{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}} = \sqrt{1-a}. \end{aligned}$$

Была использована формула сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

4. Доказать тождество: $\frac{a-16/25}{\sqrt{a}-0,8} - \frac{a\sqrt{a}-64/125}{a+0,8\sqrt{a}+16/25} = 1,6.$

Решение. Преобразуем левую часть тождества:

$$\begin{aligned} & \frac{a-16/25}{\sqrt{a}-0,8} - \frac{a\sqrt{a}-64/125}{a+0,8\sqrt{a}+16/25} = \frac{(a^{1/2})^2 - (4/5)^2}{a^{1/2} - 4/5} - \\ & - \frac{(a^{1/2})^3 - (4/5)^3}{(a^{1/2})^2 + (4/5)a^{1/2} + (4/5)^2} = \frac{(a^{1/2} - 4/5)(a^{1/2} + 4/5)}{a^{1/2} - 4/5} - \\ & - \frac{(a^{1/2} - 4/5) \cdot ((a^{1/2})^2 + (4/5)a^{1/2} + (4/5)^2)}{(a^{1/2})^2 + (4/5)a^{1/2} + (4/5)^2} = a^{1/2} + 4/5 - \end{aligned}$$

$$-(a^{1/2} - 4/5) = a^{1/2} + 4/5 - a^{1/2} + 4/5 = 8/5 = 1,6.$$

Левая часть равна правой части. Тождество доказано.

Были использованы формулы сокращенного умножения:

$$1) a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), 2) a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

5. Решить уравнение: $\sqrt{2x+10} - 1 = x$.

Решение. ОДЗ: $2x+10 > 0, x > -5$.

Исходное уравнение равносильно уравнению: $\sqrt{2x+10} = x+1$.

Возведем обе части уравнения в квадрат. При этом могут появиться посторонние корни, удовлетворяющие ОДЗ, поэтому необходима проверка. $2x+10 = (x+1)^2, 2x+10 = x^2 + 2x+1, x^2 = 9$, откуда

$$x_1 = -3, x_2 = 3.$$

Оба полученных корня удовлетворяют ОДЗ.

Проверка:

1) при $x = -3$ получаем $\sqrt{2 \cdot (-3) + 10} = -3 + 1, \sqrt{4} = -2, 2 = -2$ (неверно), следовательно $x = -3$ посторонний корень,

2) при $x = 3$ получаем $\sqrt{2 \cdot 3 + 10} = 3 + 1, \sqrt{16} = 4, 4 = 4$ (верно), $x = 3$ корень уравнения.

Ответ: $x = 3$.

6. Решить неравенство: $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3} < \frac{9}{4}$.

Решение. ОДЗ: $x \neq 0$.

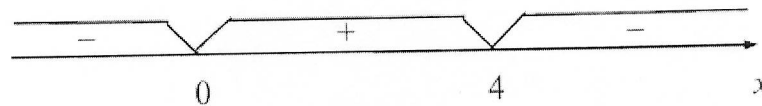
Исходное неравенство равносильно неравенству: $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3} < \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

Так как основание $\frac{2}{3} < 1$, то функция $y = \left(\frac{2}{3}\right)^t$ является убывающей, при переходе к показателям степени знак неравенства меняется на проти-

20 Решение и оформление типовых задач вступительного экзамена

воположный, т.е. $\frac{4}{x} - 3 > -2$, $\frac{4}{x} - 1 > 0$, $\frac{4-x}{x} > 0$.

Получили дробно-рациональное неравенство. Решим его методом интервалов. Для этого найдем корни числителя и знаменателя $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Определим знаки на каждом из промежутков, на которые точки $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ разбивают числовую ось.



Искомое решение: $0 < x < 4$.

Ответ: $0 < x < 4$.

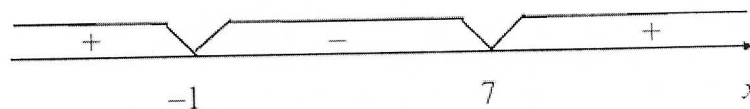
7. Решить неравенство: $(4/3)^{6x+10-x^2} < 64/27$.

Решение. ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$.

Исходное неравенство равносильно: $(4/3)^{6x+10-x^2} < (4/3)^3$.

Так как основание $4/3 > 1$ функция $y = (4/3)^t$ является возрастающей, при переходе к показателям степени знак неравенства не меняется, т.е. $6x+10-x^2 < 3$, $x^2 - 6x - 7 > 0$. Получили квадратное неравенство. Решим его методом интервалов. Для этого находим корни левой части неравенства по теореме Виета: $x_1 + x_2 = 6$, $x_1 \cdot x_2 = 7$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 7$.

Определим знаки на каждом из промежутков, на которые точки $x_1 = -1$, $x_2 = 7$ разбивают числовую ось.



Искомое решение: $x < -1$, $x > 7$.

Ответ: $x < -1$, $x > 7$.

8. Стороны параллелограмма равны m и n , угол между ними α .

Найти площадь параллелограмма и меньшую диагональ.

Дано:

$ABCD$ – параллелограмм,

$AB = n, AD = m, \angle A = \alpha$.

Найти: S_{ABCD}, BD .

Решение.

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \alpha = n \cdot m \cdot \sin \alpha$$

Диагональ BD находим из $\triangle ABD$ по

теореме косинусов

$$BD = \sqrt{m^2 + n^2 - 2m \cdot n \cdot \cos \alpha}.$$

Ответ: $S_{ABCD} = n \cdot m \cdot \sin \alpha, \quad BD = \sqrt{m^2 + n^2 - 2m \cdot n \cdot \cos \alpha}.$

9. Найти площадь круга, описанного около прямоугольника со сторонами 3 см и 4 см.

Дано:

$ABCD$ – прямоугольник,

$AB = 3 \text{ см}, AD = 4 \text{ см}.$

Найти: $S_{\text{кр}}.$

Решение.

Диагональ прямоугольника является диаметром описанной окружности. По теореме Пифагора находим:

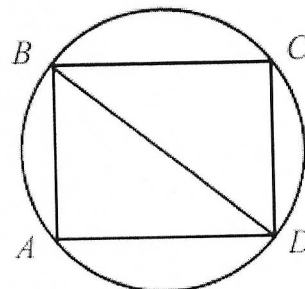
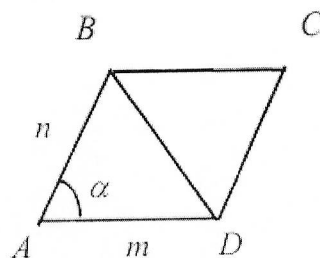
$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}, \quad BD = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

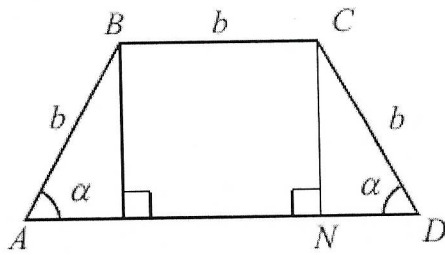
Площадь круга радиуса R вычисляется по формуле: $S_{\text{кр}} = \pi R^2.$

Таким образом $S_{\text{кр}} = \pi 5^2 = 25\pi.$

Ответ: $S_{\text{кр}} = 25\pi \text{ см}^2.$

10. В равнобедренной трапеции меньшее основание равно боковой стороне b , острый угол равен α . Найти площадь трапеции.





Дано:

$ABCD$ – трапеция,

$AD \parallel BC$,

$AB = BC = CD = b$,

$\angle A = \angle D = \alpha$.

Найти: S_{ABCD} .

Решение.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)BH = \frac{1}{2}(AD + b)BH, \text{ где } BH \perp AD, BH - \text{высота.}$$

Найдем BH и AD .

Рассмотрим $\triangle ABH$ – прямоугольный.

$$\sin \alpha = \frac{BH}{AB}, \text{ откуда } BH = AB \sin \alpha = b \sin \alpha.$$

$$\cos \alpha = \frac{AH}{AB}, \text{ откуда } AH = AB \cos \alpha = b \cos \alpha.$$

$$\triangle ABH = \triangle CDN \quad (\angle AHB = \angle CND = 90^\circ, \quad AB = CD, \quad \angle A = \angle D).$$

Отсюда следует, что $AH = ND$, поэтому $ND = b \cdot \cos \alpha$.

$$AD = AH + HN + ND = b \cos \alpha + HN + b \cos \alpha = HN + 2b \cos \alpha,$$

$HN = BC = b$ (так как $HBCN$ – прямоугольник).

$$AD = b + 2b \cos \alpha = b(1 + 2 \cos \alpha).$$

Подставляем полученные выражения в формулу для площади:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2}(b(1 + 2 \cos \alpha) + b)b \sin \alpha = \frac{1}{2}(2b + 2b \cos \alpha)b \sin \alpha = \\ &= (b + b \cos \alpha)b \sin \alpha = b^2(1 + \cos \alpha) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Ответ: $S_{ABCD} = b^2(1 + \cos \alpha) \sin \alpha$.

11. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами 6 и 15. Высота пирамиды, равная 4, проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

Дано:

$SABCD$ - пирамида,

$ABCD$ - прямоугольник,

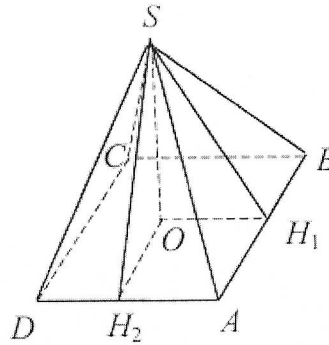
$AB = 6$, $AD = 15$,

SO – высота пирамиды,

$SO = 4$.

Найти: $S_{\text{бок}}$.

Решение.



$$S_{\text{бок}} = 2S_{\Delta ABS} + 2S_{\Delta ADS}.$$

Рассмотрим ΔSOH_1 , где SH_1 – апофема. По теореме Пифагора

$$SH_1 = \sqrt{SO^2 + OH_1^2} = \sqrt{4^2 + (15/2)^2} = \sqrt{289/4} = 17/2 = 8,5.$$

Рассмотрим ΔSOH_2 , где SH_2 – апофема. По теореме Пифагора

$$SH_2 = \sqrt{SO^2 + OH_2^2} = \sqrt{4^2 + (6/2)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

$$\begin{aligned} S_{\text{бок}} &= 2(AB \cdot SH_1/2 + AD \cdot SH_2/2) = AB \cdot SH_1 + AD \cdot SH_2 = 6 \cdot 8,5 + 15 \cdot 5 = \\ &= 51 + 75 = 126. \end{aligned}$$

Ответ: $S_{\text{бок}} = 126$.

12. Определить площадь боковой поверхности прямой призмы, боковое ребро которой равно b и составляет с диагональю большей боковой грани угол α . В основании призмы лежит прямоугольный треугольник с острым углом β .

Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ – прямая призма,

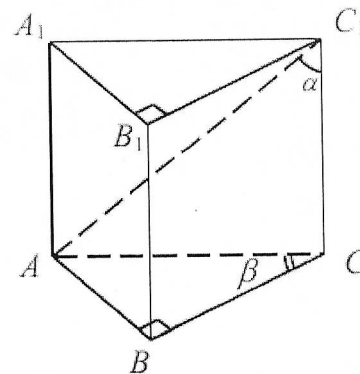
$CC_1 = b$,

$\angle AC_1C = \alpha$,

$\angle ABC = 90^\circ$,

$\angle ACB = \beta$.

Найти: $S_{\text{бок}}$.



Решение.

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} h = (AB + BC + AC)CC_1 = (AB + BC + AC)b.$$

24 Решение и оформление типовых задач вступительного экзамена

Найдем стороны треугольника ABC .

Рассмотрим $\triangle AC_1C$ – прямоугольный ($\angle C_1CA = 90^\circ$).

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{CC_1}, \text{ откуда } AC = CC_1 \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{tg} \alpha.$$

Рассмотрим $\triangle ABC$ – прямоугольный ($\angle ABC = 90^\circ$).

$$\sin \beta = \frac{AB}{AC}, \text{ откуда } AB = AC \sin \beta = b \operatorname{tg} \alpha \sin \beta.$$

$$\cos \beta = \frac{BC}{AC}, \text{ откуда } BC = AC \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha \cos \beta.$$

Подставим найденные выражения в формулу для площади боковой поверхности.

$$S_{\text{бок}} = (b \operatorname{tg} \alpha \sin \beta + b \operatorname{tg} \alpha \cos \beta + b \operatorname{tg} \alpha) b = b^2 \operatorname{tg} \alpha (\sin \beta + \cos \beta + 1).$$

$$\text{Ответ: } S_{\text{бок}} = b^2 \operatorname{tg} \alpha (\sin \beta + \cos \beta + 1).$$

13. Решить уравнение $6 \cos^2 7x - 7 \sin 7x - 1 = 0$.

Решение. ОДЗ: $x \in R$.

$$6(1 - \sin^2 7x) - 7 \sin 7x - 1 = 0, \quad 6 - 6 \sin^2 7x - 7 \sin 7x - 1 = 0,$$

$$-6 \sin^2 7x - 7 \sin 7x + 5 = 0, \quad 6 \sin^2 7x + 7 \sin 7x - 5 = 0.$$

Пусть $\sin 7x = t$, тогда $6t^2 + 7t - 5 = 0$,

$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 6 \cdot (-5)}}{12} = \frac{-7 \pm 13}{12}, \text{ откуда } t_1 = -\frac{5}{3}, t_2 = \frac{1}{2}.$$

1) $\sin 7x = -\frac{5}{3}$ уравнение не имеет решений, так как $|\sin 7x| \leq 1$ для

любого $x \in R$.

$$2) \sin 7x = \frac{1}{2}, \quad 7x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + n\pi, \quad 7x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi,$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{42} + n\frac{\pi}{7}, \quad n \in Z. \quad \text{Ответ: } x = (-1)^n \frac{\pi}{42} + n\frac{\pi}{7}, \quad n \in Z.$$