

**Государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования Московской области
«Университет «Дубна»
Филиал «Протвино»**

Кафедра «Математика и естественные науки»

К. Г. Клименко, Е. А. Козловский, Г. В. Левицкая

«МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ИЗБРАННЫХ РАЗДЕЛОВ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»

Практикум (электронное пособие)

Рекомендовано кафедрой математики и естественных наук филиала «Протвино»
государственного университета «Дубна»
в качестве методического пособия для студентов,
обучающихся по направлениям «Автоматизация технологических процессов
и производств», «Информатика и вычислительная техника», «Физика».

Протвино
2017

УДК 669.018

ББК 22.161

К 49

Рецензент:

доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник НИЦ «Курчатовский институт» — ИФВЭ
А.В. Разумов

Клименко К.Г.

К 49 Методы решения некоторых задач избранных разделов высшей математики: практикум (электронное пособие) / К. Г. Клименко, Е. А. Козловский, Г. В. Левицкая — Протвино, 2017. — 63 с.

В данном практикуме рассматриваются методы решения некоторых типов задач из таких разделов общепринятого курса математического анализа, как предел и экстремум функции, градиент и производная функции по направлению, суммирование числовых рядов, дифференциальные уравнения и разложение их решений в степенные ряды и др., которые изучаются на практических занятиях студентами филиала «Протвино» государственного университета "Дубна". Он может быть полезным и для изучающих курс высшей математики в технических вузах. Кроме того, практикум предназначен для подготовки студентов к ежегодным тестированиям по высшей математике, проводимым в университете "Дубна".

Рекомендуется студентам первых курсов, которые претендуют на хорошую или отличную оценку за экзамен по математическому анализу и дополнительным главам высшей математики в университете "Дубна".

© Государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Московской области «Университет «Дубна», филиал «Протвино», 2017

© Клименко К.Г., Козловский Е.А., Левицкая Г.В. 2017

Оглавление

Введение	4
I. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИИ.....	4
1.1 Бесконечно малые и их использование для вычисления пределов	4
1.2 Раскрытие неопределенностей вида 1^∞	8
II. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ	9
2.1 Дифференцирование функции одной переменной.....	9
2.2 Частные производные функции нескольких переменных	11
2.3 Производная неявно заданной функции	12
III. ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИЙ.....	15
3.1 Наибольшее и наименьшее значения функции одной переменной	15
3.2 Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных.....	16
3.3 Задачи на условный экстремум	19
IV. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....	20
4.1 Неопределённый интеграл	20
V. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ	22
5.1 Градиент и производная по направлению	22
5.2 Касательная плоскость и нормаль к поверхности.....	25
VI. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ДУ).....	29
6.1 Задачи, связанные с основными понятиями ДУ.....	29
6.2 Системы дифференциальных уравнений	30
6.3 Дифференциальные уравнения первого порядка	30
6.4 Линейные однородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами	32
6.5 Линейные неоднородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами	34
VII. ЗАДАЧИ НА ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ	39
7.1 Необходимый признак сходимости числового ряда	39
7.2 Достаточные признаки сходимости положительных рядов	40
7.3 Некоторые методы суммирования числовых рядов	49
VIII. ЗАДАЧИ НА СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ	53
8.1 Представление неявной функции с помощью степенного ряда	53
8.2 Интегрирование ДУ с помощью степенных рядов.....	57
8.3 Суммирование числовых рядов с помощью степенных рядов	59
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	Ошибка! Закладка не определена.

Введение

В предлагаемом методическом пособии разбираются методы решения некоторых типов задач из общепринятого курса математического анализа, изучаемые на практических занятиях в Протвинском филиале международного университета "Дубна". Часть из этих задач, или похожих на них, предлагались в разные годы студентам Протвинского филиала международного университета "Дубна" на тестировании по математике (в этом случае возле номера задачи в скобках стоит слово "тест"). Кроме того, проводится разбор и более сложных задач, отмеченных символом (*). Последние необходимо уметь решать студентам, которые претендуют на хорошую или отличную оценку за экзамен по математическому анализу в университете "Дубна". В каждом параграфе пособия принята своя нумерация формул, утверждений, примеров, задач и т.д.

I. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИИ

1.1 Бесконечно малые и их использование для вычисления пределов

Определение 1. Функция (или величина) $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$ (в точке a), если $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$, то есть $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$. (Часто используемое сокращение: б.м. величина $\alpha(x)$ в точке a .)

Определение 2. Говорят, что б.м. величина $\alpha(x)$ в точке a имеет более высокий порядок малости, чем бесконечно малая $\beta(x)$ в этой же точке, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)/\beta(x) = 0$. (Это свойство б.м. величин обычно записывается как $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \rightarrow a$.)

Определение 3. Говорят, что две бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в точке a имеют одинаковый порядок малости в этой точке, если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)/\beta(x) = A$, где величина $A \neq 0$ и $A \neq \pm\infty$. (В этом случае используется обозначение: $\alpha(x) = O(\beta(x))$ при $x \rightarrow a$.)

Из-за особой важности случая $A=1$ введен специальный термин.

Определение 4. Две бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны в точке a , если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)/\beta(x) = 1$. (В этом случае принято обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow a$.)

Замечание. Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow a$, тогда нетрудно показать, что $\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$ и, наоборот, $\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$ при $x \rightarrow a$.

На лекциях по математическому анализу нами показана эквивалентность некоторых б.м. элементарных функций, зависящих от $\alpha(x)$, если $\alpha(x) \rightarrow 0$. Полученные результаты суммируются в следующей таблице.

Таблица I. Соотношения эквивалентности для простейших б.м. элементарных функций при $\alpha \rightarrow 0$		
I. $\sin \alpha \sim \alpha$	II. $\cos \alpha - 1 \sim -\frac{\alpha^2}{2}$	III. $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$

IV. $(1 + \alpha)^m - 1 \sim \alpha m$	V. $\ln(1 + \alpha) \sim \alpha$	VI. $e^\alpha - 1 \sim \alpha$
VII. $A^\alpha - 1 \sim \alpha \ln A$	VIII. $\operatorname{arctg}(\alpha) \sim \alpha$	IX. $\arcsin(\alpha) \sim \alpha$

Соотношения из **Таблицы I** остаются справедливыми и в случае, когда $\alpha(x)$ является б.м. функцией при $x \rightarrow a$, то есть $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$. Например, $\sin \sin x \sim \sin x$ при $x \rightarrow \pi$.

В силу замечания к **Определению 4**, знак эквивалентности в каждом соотношении **Таблицы I** можно заменить на знак равенства, добавив при этом в правую часть каждого из соотношений б.м. более высокого порядка малости. Таким образом, справедливы следующие равенства при $\alpha(x) \rightarrow 0$: $\sin \alpha = \alpha + o(\alpha)$, $\cos \alpha - 1 = -\frac{\alpha^2}{2} + o(\alpha^2)$ и т.д.

С помощью **Таблицы I** легко найти эквивалентные б.м. для б.м. функций более сложной структуры.

Задача 1. Найдите эквивалентную б.м. функцию для $\cos \ln(1+x) - 1$ при $x \rightarrow 0$.

► Полагая $\alpha(x) \equiv \ln(1+x)$, мы видим, что $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. В этом случае, используя соотношение II **Таблицы I**, находим при $x \rightarrow 0$:

$$\cos \ln(1+x) - 1 \sim -\frac{\ln^2(1+x)}{2}.$$

Далее, при $x \rightarrow 0$ б.м. функцию $\ln(1+x)$ можно заменить на x (формула V **Таблицы I**), и в результате имеем: $\cos \ln(1+x) - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$. ◀

Задача 2*. Используя **Таблицу I**, найдите эквивалентные б.м. величины при $x \rightarrow 0$ для следующих б.м. функций:

- i) $y = \ln \cos 3x$; ii) $y = \sin \operatorname{tg}(2x^2)$; iii) $y = \sqrt{\cos 2x} - 1$;
iv) $y = \frac{1}{1+3 \ln(1-x^2)} - 1$; v) $y = \cos x \cdot \ln(1+x)$; vi) $y = e^{\sin^2 x} - 1$;
vii) $y = \frac{1}{\sqrt{e^{-2x^2}}} - 1$; viii) $y = \cos \sin x - 1$; ix) $y = \operatorname{arctg} \ln(1-x)$.

► Рассмотрим случай i). Чтобы привести данную б.м. функцию к табличному виду (формула V **Таблицы I**), вычтем и прибавим единицу в аргументе логарифма. Далее, мысленно полагая $\alpha \equiv \cos 3x - 1$, воспользуемся формулой V **Таблицы I**, а затем и формулой II. В результате имеем:

$$\ln \cos 3x \equiv \ln[1 + (\cos 3x - 1)] \sim (\cos 3x - 1) \sim -\frac{9x^2}{2}. \quad \blacktriangleleft$$

В операциях с б.м. функциями полезно иметь в виду следующее важное обобщение *замечания* к **Определению 4**.

Утверждение I. Пусть

$$f(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) + \dots + \psi_n(x),$$

где $\psi_i(x)$, $\forall i = \overline{1, n}$ — б.м. функция при $x \rightarrow a$. Тогда, сравнивая при $x \rightarrow a$ попарно все слагаемые этого выражения и отбрасывая каждый раз б.м. функцию более высокого порядка малости, мы придем к эквивалентному выражению, содержащему функции $\psi_i(x)$ только

одного, наименьшего, порядка малости. Каждую из этих б.м. функций можно в свою очередь заменить на эквивалентную величину.

Используя это замечание, можно существенно упростить поиск эквивалентных б.м. функций. Например, если $f(x) = x + \sin 5x + x^2$, то нетрудно видеть, что при $x \rightarrow 0$ третье слагаемое является б.м. функцией более высокого порядка малости, по сравнению с двумя первыми. Поэтому им можно пренебречь, и в результате получим

$$x + \sin 5x + x^2 \sim x + \sin 5x \sim x + 5x = 6x.$$

Задача 3*. Напишите эквивалентные выражения при $x \rightarrow 0$ для следующих б.м. функций:

- | | | |
|-------------------------------------|--|---|
| i) $\ln(1 - x^2 + x);$ | ii) $\sin^2(5\sqrt{x} + x);$ | iii) $\cos(4x^2) - 1;$ |
| iv) $\cos(4x^2 + x) - 1;$ | v) $e^{2x} - 1;$ | vi) $e^{2x+\sqrt{x}} - 1;$ |
| vii) $\ln(1 - x^2);$ | viii) $\sin^2(5\sqrt{x});$ | ix) $\ln(\cos 2x);$ |
| x) $3 - \sqrt[3]{27 - x};$ | xi) $3 - \sqrt[3]{27 - x + \sqrt{x}};$ | xii) $2^{x^3} - 1;$ |
| xiii) $2^{x^3+x^2} - 1;$ | xiv) $\ln \cos(\sqrt{x} + x^2);$ | xv) $\cos \sqrt{\sin x} - 1;$ |
| xvi) $\sqrt[3]{\cos \sqrt{x}} - 1;$ | xvii) $\ln(e^x + \sqrt{x});$ | xviii) $\cos x \cos x^2 - 1;$ |
| xix) $\cos x \cos 2x \cos 3x - 1;$ | xx) $e^{\sin x} - e^{-x};$ | xxi) $e^{\sin \sqrt{x}} - e^{\operatorname{tg} x}.$ |

► Случай i). Полагая в формуле V **Таблицы I** б.м. функцией $\alpha = x - x^2$, находим при $x \rightarrow 0$:

$$\ln(1 + x - x^2) \sim x - x^2.$$

В правой части этого соотношения второе слагаемое, то есть x^2 , является при $x \rightarrow 0$ б.м. функцией более высокого порядка, чем первое слагаемое x , следовательно, им можно пренебречь (**Утверждение I**). В результате имеем: $\ln(1 + x - x^2) \sim x$.

Случай x). Сделаем тождественное преобразование исходной б.м. функции при $x \rightarrow 0$:

$$3 - \sqrt[3]{27 - x} \equiv 3 - 3\sqrt[3]{1 - \frac{x}{27}} \equiv -3\left(\sqrt[3]{1 - \frac{x}{27}} - 1\right).$$

Применяя к выражению в круглых скобках формулу IV **Таблицы I**, окончательно находим:

$$3 - \sqrt[3]{27 - x} \sim \frac{x}{27}.$$

Случай xviii). Сделаем тождественное преобразование исходного выражения:

$$\begin{aligned} \cos x \cos x^2 - 1 &\equiv [(\cos x - 1) + 1][(\cos x^2 - 1) + 1] - 1 \\ &\equiv (\cos x - 1)(\cos x^2 - 1) + (\cos x - 1) + (\cos x^2 - 1). \end{aligned}$$

Во второй строке этого соотношения выражения во всех круглых скобках стоят б.м. функции при $x \rightarrow 0$. Заменяя их с помощью формулы II **Таблицы I** на эквивалентные б.м. величины, находим окончательно

$$\cos x \cos x^2 - 1 \sim \left(-\frac{x^2}{2}\right)\left(-\frac{x^4}{2}\right) - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} \sim -\frac{x^2}{2},$$

где мы воспользовались приведенным выше **Утверждением I** и отбросили все слагаемые вида $o(x^2)$ при $x \rightarrow 0$. Остальные задачи решаются таким же образом. ◀

Приступим, наконец, к основной теме этого параграфа — вычислению пределов с помощью эквивалентных б.м. функций; прежде всего, рассмотрим как с их помощью можно раскрывать неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Утверждение II. Пусть даны две б.м. функции $A(x)$ и $B(x)$ при $x \rightarrow a$, которые при $x \rightarrow a$ эквивалентны соответственно б.м. функциям $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, то есть

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{A(x)}{\alpha(x)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{B(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{A(x) \cdot \alpha(x) \cdot \beta(x)}{\alpha(x) \cdot \beta(x) \cdot B(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{A(x)}{\alpha(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{B(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}. \quad (1)$$

Суть этого утверждения в том, что предел отношения двух б.м. величин равен пределу отношения соответствующих эквивалентных б.м. функций.

Задача 4. Вычислить предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt{1+9x}}{1 - \sqrt{1-x}}.$$

► Прежде всего найдём б.м. функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow 0$, эквивалентные соответственно числителю и знаменателю данного выражения. Преобразуя тождественным образом числитель, получаем

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+2x} - \sqrt{1+9x} &\equiv (\sqrt[3]{1+2x} - 1) - (\sqrt{1+9x} - 1) \sim \\ &\sim \frac{2x}{3} - \frac{9x}{2} = -\frac{23x}{6} \equiv \alpha(x), \end{aligned}$$

где величины, стоящие в круглых скобках, мы заменили на эквивалентные б.м. функции (см. формулу IV **Таблицы I**), а потом просуммировали подобные члены. Знаменатель выражения уже имеет практически табличный вид, поэтому очевидно, что

$$1 - \sqrt{1-x} \sim \frac{x}{2} \equiv \beta(x).$$

Теперь, используя формулу (1) с найденными б.м. функциями $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, нетрудно получить:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt{1+9x}}{1 - \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-23x/6}{x/2} = -\frac{23}{3}. \quad \text{?? ?} \blacktriangleleft$$

Задача 5 (тест). С помощью формулы (1) и эквивалентных б.м. функций, приведенных в **Таблице I**, вычислить пределы:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}; & \text{ii)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 4x}; & \text{iii)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{\sin^2 x}; \\ \text{iv)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}; & \text{v)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\arcsin x}; & \text{vi)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\ln(1+3x) - 1}; \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} \text{vii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2) - 1}{\cos x - 1}; & \text{viii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{\operatorname{tg}^2 x^2}; & \text{ix)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2\sqrt{x}) - 1}{\arcsin \sqrt{x}}; \\ \text{x)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}; & \text{xi)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin^2 2x}; & \text{xii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[8]{1-x^2} - 1}{\operatorname{tg}^2 x}. \end{array}$$

Задача 6*. Вычислить следующие пределы:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[4]{1+9x}}{1 - \sqrt{1-x/2}}; & \text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{x}; \\ \text{iii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^4 3\sqrt{x}}; & \text{iv)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}; \\ \text{v)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} \sqrt[n]{1+bx} - 1}{x}; & \text{vi)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}; \\ \text{vii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{3x}}{\sin 0.5x^2 - \sin x}; & \text{viii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}; \\ \text{ix)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{\sin^2 2x}; & \text{x)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^{x^2} + 2\sqrt{x})}{\operatorname{tg} \sqrt{x}}. \end{array}$$

► Разберём случай vi). Справедливо тождество:

$$\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x} \equiv [\sqrt{1 + (\cos x - 1)} - 1] - [\sqrt[3]{1 + (\cos x - 1)} - 1].$$

Очевидно, что выражения как в круглых, так и в квадратных скобках этого соотношения являются б.м. функциями при $x \rightarrow 0$, для которых эквивалентные выражения можно найти с помощью соответственно формул IV и II Таблицы I. Используя формулу IV для выражения в квадратных скобках, находим

$$\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x} \sim \frac{(\cos x - 1)}{2} - \frac{(\cos x - 1)}{3} = \frac{(\cos x - 1)}{6}.$$

Применяя затем к полученному выражению формулу II, находим эквивалентную б.м. функцию для числителя исходного выражения vi):

$$\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x} \sim -\frac{x^2}{12}.$$

В знаменателе исходного выражения vi) стоит функция $\sin^2 x$, которая при $x \rightarrow 0$ эквивалентна б.м. x^2 . Предел выражения vi) найдем, заменяя числитель и знаменатель на эквивалентные б.м., таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{12x^2} = -\frac{1}{12}. \quad \blacktriangleleft$$

1.2 Раскрытие неопределенностей вида 1^∞

В этом случае необходимо вычислить предел вида $\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)}$, причем известно, что $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 1$, а $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = \infty$. Если u^v представить в виде $e^{v \ln u}$, то неопределенность 1^∞ сводится к исследованию неопределенности вида $\infty \cdot 0$, появляющейся в показателе экспоненты (так как $\ln u \rightarrow 0$, а $v \rightarrow \infty$). Если при этом $\lim_{x \rightarrow a} v \ln u = b$, то $\lim_{x \rightarrow a} u^v = \lim_{x \rightarrow a} e^{v \ln u} =$

$e^{\lim_{x \rightarrow a} v \ln u} = e^b$ (здесь мы воспользовались свойством непрерывности функции e^x и внесли знак предела в аргумент этой функции).

Задача 7. Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

► Запишем $(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ в виде $e^{\operatorname{ctg}^2 x \ln \cos x}$ и вычислим предел

$$b = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg}^2 x \ln(\cos x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x}$$

Очевидно, что $\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x = 1$. Для нахождения второго предела воспользуемся соотношениями $\ln(\cos x) \sim -\frac{x^2}{2} \equiv \alpha(x)$ (см. решение случая ii) **Задачи 2**) и $\sin^2 x \sim x^2 \equiv \beta(x)$. Подставив эти б.м. функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в формулу (1), получаем, что

$$b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, искомый предел равен

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = e^b = e^{-\frac{1}{2}}. \quad \blacktriangleleft$$

Задача 8*. Вычислите по аналогии следующие пределы:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(\pi x))^{\frac{1}{x}}; \quad \text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}; \\ \text{iii)} & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{\ln(1+3x)}}; \quad \text{iv)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [(3x^2 + 2)/(3x^2 - 4)]^{x^2}. \end{array}$$

Указание. При решении задачи iv) можно сделать замену переменных $x = 1/t$, где $t \rightarrow 0$.

II. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Так как правила дифференцирования изложены во всех курсах высшей математики (см., например, [1, 2]), в этой главе приводятся наиболее типичные задачи на вычисление производных и дифференциалов как функций одной, так и нескольких переменных, которые уже предлагались или которые могут в будущем встретиться на экзамене по математическому анализу или тестировании по математике.

2.1 Дифференцирование функции одной переменной

Используя таблицу производных и основные правила дифференцирования, решите следующие задачи.

Задача 1 (тест). Найдите производные следующих функций.

$$\text{i)} \quad y = \sqrt{x} - 3x^2 + 5, \quad \text{Ответ:} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 6x.$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{ii)} & y = 5x^4 - \sqrt{x} + 4, \quad \text{Ответ:} \quad y' = 20x^3 - \frac{1}{2\sqrt{x}}. \\
 \text{iii)} & y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}; \quad \text{iv)} \quad y = 4x^6 + \frac{4}{x^5} + \frac{3}{x} + \sqrt[3]{x^7}; \\
 \text{v)} & y = 7x + \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} - \sqrt[7]{x^4}; \quad \text{vi)} \quad y = 5x^4 + \frac{9}{x^3} - \frac{2}{x} + \sqrt[3]{x^4}.
 \end{array}$$

Задача 2 (тест). Найдите производную $y'(x)$, если $y(x)$ есть отношение двух элементарных функций.

$$\begin{array}{lll}
 \text{i)} & y = \frac{x+1}{x-2}, & \text{Ответ:} \quad y' = \frac{-3}{(x-2)^2}; \quad \text{ii)} \quad y = \frac{x}{2x-1}; \\
 \text{iii)} & y = \frac{x+3}{x-1}; & \text{iv)} \quad y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}; \quad \text{v)} \quad y = \frac{\sqrt{x}+1}{\cos x}; \\
 \text{vi)} & y = \frac{\ln x}{\operatorname{tg} x}; & \text{vii)} \quad y = \frac{2^x}{\operatorname{arctg} x}; \quad \text{viii)} \quad y = \frac{\arcsin x}{x^3}.
 \end{array}$$

Задача 3 (тест). Найдите производную $y'(x)$, если $y(x)$ является произведением двух элементарных функций.

$$\begin{array}{lll}
 \text{i)} & y = (x+1)e^x, & \text{Ответ:} \quad y' = (x+2)e^x; \quad \text{ii)} \quad y = (x-3)e^x; \\
 \text{iii)} & y = \sqrt{x} \sin x; & \text{iv)} \quad y = e^x \arccos x; \quad \text{v)} \quad y = (x^2+1) \ln x.
 \end{array}$$

Задача 4 (тест). Найдите производную $y'(x)$, если $y(x)$ является произведением двух элементарных функций.

$$\begin{array}{lll}
 \text{i)} & y = 2^x \cdot \sqrt{x}; & \text{ii)} \quad y = x^2 \cdot \log_2 x; \quad \text{iii)} \quad y = 2^x \cdot x^2; \\
 \text{iv)} & y = 3^x \cdot \sqrt[3]{x}; & \text{v)} \quad y = x^3 \cdot \log_3 x; \quad \text{vi)} \quad y = 3^x \cdot x^3; \\
 \text{vii)} & y = (3x^2 + 2x - 2) \sin 5x; & \text{viii)} \quad y = (3x^3 + 3x - 7) \cos 5x; \quad \text{ix)} \quad y = \operatorname{tg} x \cdot \ln x.
 \end{array}$$

Задача 5 (тест). Найдите производную сложной функции $y(x)$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{i)} & y = \cos(x^2 - 1); \quad \text{Ответ:} \quad y' = -2x \sin(x^2 - 1); \\
 \text{ii)} & y = \ln(x^2 + 1); \quad \text{Ответ:} \quad y' = \frac{2x}{x^2+1}; \\
 \text{iii)} & y = e^{x^2+3}; \quad \text{Ответ:} \quad y' = 2xe^{x^2+3}; \\
 \text{iv)} & y = \operatorname{tg}(x^3 + x - 2); \quad \text{Ответ:} \quad y' = \frac{3x^2+1}{\cos^2(x^3+x-2)}; \\
 \text{v)} & y = (x^4 + 1)^{10}; \quad \text{Ответ:} \quad y' = 10(x^4 + 1)^9 \cdot 4x^3; \\
 \text{vi)} & y = \arcsin(2 - x^3); \quad \text{Ответ:} \quad y' = \frac{-3x^2}{\sqrt{1-(2-x^3)^2}}; \\
 \text{vii)} & y = 2^{\cos x} \quad \text{Ответ:} \quad y' = -\sin x \cdot 2^{\cos x} \ln 2; \\
 \text{viii)} & y = \sqrt[3]{3x^4 + 2x - 5}; \quad \text{Ответ:} \quad y' = \frac{1}{3} (3x^4 + 2x - 5)^{-2/3} \cdot (12x^3 + 2);
 \end{array}$$

ix) $y = \sin^4 5x$; Ответ: $y' = 4\sin^3 5x \cdot \cos 5x \cdot 5$.

Задача 6*. Найти производные следующих функций:

i) $y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x^5$; ii) $y = \operatorname{tg}^4 3x \cdot \arcsin 2x^3$;
 iii) $y = e^{\arccos^3 x} / \sqrt{x+5}$; iv) $y = 2^{\sin x} / \sqrt[3]{2x^2 + 5x - 1}$;
 v) $y = e^{\sqrt[5]{\sin^4 2x}} + \frac{3}{2\sqrt{\operatorname{tg} 3x}}$; vi) $y = 2^{\sin^3 4x} + \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}$;
 vii) $y = 2^{5+\cos^3 x} + \frac{4}{\operatorname{arctg}^2 x}$; viii) $y = 2^{3+\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{\ln^2 x}$.

Задача 7 (тест). Найти производные второго порядка функций:

i) $y = \sin 2x$; ii) $y = \cos 8x$; iii) $y = e^{3x+2}$; iv) $y = \sin^2 3x$;
 v) $y = \cos^2 2x$; vi) $y = xe^x$; vii) $y = \operatorname{tg} x$; viii) $y = \sqrt[3]{x}$;
 ix) $y = \sqrt{2-x}$; x) $y = e^x + \cos x$; xi) $y = \sin x + \ln x$; xii) $y = (1+2x)^3$;
 xiii) $y = x^3 + e^{3x}$.

2.2 Частные производные функции нескольких переменных

Задача 1 (тест). Найдите частные производные z'_x и z'_y в точке $M_0(x_0; y_0)$, если заданы следующие функции и значения координат $(x_0; y_0)$.

i) $z(x,y) = x^4 \cos 3y$, $M_0(1; \frac{\pi}{6})$; Ответ: $z'_x = 0$, $z'_y = -3$;
 ii) $z(x,y) = x^5 \sin 4y$, $M_0(-1; \frac{\pi}{4})$; Ответ: $z'_x = 0$, $z'_y = 4$;
 iii) $z(x,y) = e^{x^2+y}$, $M_0(1;0)$; Ответ: $z'_x = 2e$, $z'_y = e$;
 iv) $z(x,y) = e^{x+y^3}$, $M_0(0;1)$; Ответ: $z'_x = e$, $z'_y = 3e$.

Задача 2 (тест). Установите соответствие между функциями 1)–4) и их частными производными а)–д) (именно такая формулировка задачи использовалась при тестировании!).

1) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xy)$; 2) $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(xy)$; 3) $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(xy^2)$; 4) $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2y^2)$;
 а) $2x^2$; б) 0; в) 1; г) x .

Ответ: 1) $\leftrightarrow$ б); 2) $\leftrightarrow$ г); 3) $\leftrightarrow$ в); 4) $\leftrightarrow$ а).

Задача 3*. Найдите частные производные u'_x и u'_y функции двух переменных $u(x,y)$.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad u(x,y) &= x^2 + y^3 + 3x^2y^3; & \text{ii)} \quad u(x,y) &= \frac{\cos x}{\cos y}; & \text{iii)} \quad u(x,y) &= e^{\frac{x}{y}} \operatorname{tg}(x+y); \\ \text{iv)} \quad u(x,y) &= \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; & \text{v)} \quad u(x,y) &= \operatorname{arctg} \frac{x}{y}; & \text{vi)} \quad u(x,y) &= xy \ln \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Задача 4*. Найдите частные производные u_x' , u_y' и u_z' функции трех переменных $u(x,y,z)$.

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad u &= xyz + \frac{x}{yz}; & \text{ii)} \quad u &= \sin(xy + yz); & \text{iii)} \quad u &= \left(\frac{y}{x}\right)^z; \\ \text{iv)} \quad u &= (x + \cos z)^y; & \text{v)} \quad u &= z^{x/y}; & \text{vi)} \quad u &= x^{y^z}; \\ \text{vii)} \quad u &= x^y y^z z^x; & \text{viii)} \quad u &= (x^2 + \arccos y)^{\sin z}. \end{aligned}$$

Задача 5*. Найдите всевозможные частные производные второго порядка следующих функций:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad u(x,y) &= x^3 + y^4 + 2x^3y^4; & \text{ii)} \quad u(x,y,z) &= \sin(x + yz); & \text{iii)} \quad u(x,y,z) &= x^{yz}; \\ \text{iv)} \quad u(x,y) &= \cos xy; & \text{v)} \quad u(x,y) &= \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{x+y}; & \text{vi)} \quad u(x,y,z) &= xy^2z^3 + \frac{x}{y^2z^3}. \end{aligned}$$

2.3 Производная неявно заданной функции

Рассмотрим равенство

$$F(x,y) = 0. \quad (1)$$

Предположим известно, что при каждом фиксированном значении x из некоторого множества $\{X\}$ это равенство, рассматриваемое как уравнение относительно переменной y , имеет вполне определенное решение $y(x)$. Тем самым с помощью уравнения (1) между переменными x и y устанавливается функциональная зависимость, явный вид которой "скрыт" в уравнении (1). Про определенную таким образом функцию $y(x)$ говорят, что на множестве $\{X\}$ она *задана неявно* с помощью уравнения (1). При этом на множестве $\{X\}$, очевидно, справедливо тождество $F(x, y(x)) \equiv 0$. Производная $y'(x)$ неявно заданной функции находится из уравнения $\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = 0$. Кроме того нужно иметь в виду, что одно и то же уравнение может задавать неявным образом несколько различных функций. Как правило, явное аналитическое выражение для функций, заданных с помощью уравнения (1), невозможно получить. Но бывают и исключения. Рассмотрим пример. Пусть

$$F(x,y) \equiv 2y^4 - 10y^2 + x^2 - 1 = 0. \quad (2)$$

Считая, что y зависит от x , дифференцируем это равенство по x :

$$8y^3 \cdot y'(x) - 20y \cdot y'(x) + 2x = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (3) находим, что

$$y'(x) = \frac{x}{y(10-4y^2)}. \quad (4)$$

Таким образом, мы выразили производную $y'(x)$ неявно заданной функции через саму функцию $y(x)$ и независимую переменную x . Далее, считая, что y зависит от x , можно про-

дифференцировать уже соотношение (5) и получить выражение для второй производной $y''(x)$ неявно заданной функции и т.д. (см. задачи ниже).

В данном примере уравнение (2) является биквадратным относительно переменной y . Найдем его решения:

$$y_{1,2,3,4}(x) = \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{27 - 2x^2}}{2}}. \quad (5)$$

Про каждую из полученных в *явном* аналитическом виде функцию (5) можно в то же самое время сказать, что она задаётся в *неявном* виде уравнением (2). Нетрудно проверить, что производная от каждой из функций (5) удовлетворяет соотношению (4).

Задача 1*. Вычислить производные функций, заданных неявно следующими уравнениями:

- i) $\operatorname{arctg} y - y + x = 0$; ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; iii) $\operatorname{arctg}(x+y) = x$;
iv) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; v) $e^x = x + y$; vi) $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$.

Задача 2*. Найдите первую $y'(0)$ и вторую $y''(0)$ производные функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $F(x,y)=0$ и удовлетворяющей условию $y(0)=1$, если:

- i) $F(x,y) = x^3 + y^3 - 5x + 4y - 5$; ii) $F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 1$;
iii) $F(x,y) = x^3 + y^3 - xy - 1$; iv) $F(x,y) = y \sin x + x^2 + y^2 - 1$.

► Здесь мы рассмотрим подробно только случай i), для которого уравнение, задающее неявно функцию $y(x)$, имеет вид $F(x,y) = x^3 + y^3 - 5x + 4y - 5 = 0$. Легко проверить, что точка $M_0(0,1)$ удовлетворяет этому уравнению. Дифференцируя его по x и помня, что $y = y(x)$, имеем

$$3x^2 + 3y^2 y'(x) - 5 + 4y'(x) = 0.$$

Отсюда находим, что

$$y'(x) = \frac{5 - 3x^2}{3y^2(x) + 4}.$$

Дифференцируя последнее соотношение по x , находим (не забывая, что y зависит от x):

$$y'' = \frac{-6x[3y^2(x) + 4] - [5 - 3x^2] \cdot 6y(x) \cdot y'(x)}{[3y^2(x) + 4]^2}.$$

По условию $y(x=0) = 1$, следовательно, $y'(0) = 5/7$. С учетом этого, получаем, что $y''(0) = -5 \cdot 6 \cdot 5/7^3$. Оставшиеся задачи разберите самостоятельно. ◀

Множество точек плоскости, чьи координаты (x,y) удовлетворяют уравнению (1), образуют некоторую кривую линию L . Предположим, что точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на этой линии, т. е. $F(x_0, y_0) = 0$. Возникает следующая задача: Как написать уравнение касательной (и/или нормали) к кривой L в этой точке? Предположим, что существует окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ такая, что часть кривой L , находящаяся внутри этой окружности, является графиком некоторой функции $y = f(x)$. (Очевидно, эта функция

задается неявно уравнением (1)¹.) Для решения поставленного вопроса достаточно найти производную $f'(x)$ в точке x_0 неявно заданной функции, а затем воспользоваться известными правилами написания уравнений касательной и нормали к графику функции.

Задача 3*. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $F(x,y) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если:

i) $F(x, y) = x^3 y^4 + x^2 - y + 4x + 4, \quad M_0(0,4);$

ii) $F(x, y) = xy^2 + x^3 - y + 3, \quad M_0(0,3);$

iii) $F(x, y) = x^3 + x^4 y^3 - y - 1, \quad M_0(1,1);$

iv) $F(x, y) = x^2 y^3 + x + y^2 - 3y - 3, \quad M_0(3,0).$

► Здесь мы подробно разберем только случай i), для которого уравнение, задающее неявно функцию $y(x)$, имеет вид $F(x, y) = x^3 y^4 + x^2 - y + 4x + 4 = 0$. Легко проверить, что точка $M_0(0,4)$ удовлетворяет этому уравнению, т.е. она находится на графике функции $y = y(x)$. Дифференцируя по x это равенство, в котором предполагается, что $y = y(x)$, находим

$$3x^2 \cdot y^4 + 4x^3 \cdot y^3 \cdot y' + 2x - y' + 4 = 0.$$

Отсюда находим производную неявно заданной функции:

$$y' = -\frac{4 + 2x + 3x^2 y^4}{4x^3 y^3 - 1}.$$

Подставляя значения $x = 0$ и $y = 4$, получаем значение производной этой функции в точке $x = 0$: $y'(x=0) = 4$.

Пусть (X, Y) — координаты произвольной точки, лежащей на касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$. Тогда уравнение этой касательной можно представить как $Y = y(x_0) + y'(x_0)(X - x_0)$.

Так как в нашем случае $x_0 = 0, y(x_0) = y(0) = 4, y'(x_0) = y'(0) = 4$, то уравнение искомой касательной к кривой $F(x,y) = 0$ в точке $M_0(0,4)$ имеет вид: $Y = 4 + 4X$.

Наконец, если обозначить через (X, Y) координаты произвольной точки, лежащей на нормали к графику функции $y=y(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, то уравнение нормали выглядит как

$$Y = y(x_0) - \frac{1}{y'(x_0)}(X - x_0).$$

В рамках нашей задачи, очевидно, оно сводится к следующему уравнению: $Y = 4 - \frac{X}{4}$.

Остальные задачи решаются аналогичным способом. ◀

¹ Условия, при которых это возможно, т.е. теорема о существовании и единственности неявно заданной функции $f(x)$, приведены далее в разделе VIII.8.1.

III. ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИЙ

3.1 Наибольшее и наименьшее значения функции одной переменной

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда ее наибольшее и наименьшее значения достигаются либо в критических точках (точках, в которых $f'(x) = 0$, $\pm\infty$ ² или не существует), либо на концах отрезка $[a, b]$. Поэтому процедуру нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ можно разбить на три этапа:

1. Ищем производную данной функции.
2. Находим критические точки функции $f(x)$ и выбираем те из них, которые принадлежат данному отрезку $[a, b]$.
3. Вычисляем значения функции в критических точках, лежащих внутри отрезка, и значения функции на концах отрезка. Сравнивая полученные значения, находим наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на данном отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 1*. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = (x - 1)e^{-x}$, заданной на отрезке $[0; 3]$.



1. Находим производную функции $f(x)$: $f'(x) = (2 - x)e^{-x}$.
2. Единственная критическая точка заданной функции это точка $x = 2$, которая принадлежит отрезку $[0; 3]$.
3. Так как $f(0) = -1$, $f(2) = e^{-2}$, $f(3) = 2e^{-3}$, то нетрудно видеть, что наименьшее значение функции на отрезке $[0; 3]$, равное -1 , достигается в точке $x = 0$. Так как $f(2) > f(3)$, то наибольшее значение функции, которое достигается в точке $x = 2$, равно e^{-2} . ◀

Задача 2*. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x^{1/3} - \frac{3}{4}x^{4/3} + 1$, заданной на отрезке $[-1; 8]$.



1. Находим производную функции $f(x)$: $f'(x) = x^{-2/3} - x^{1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[3]{x} = \frac{1-x}{\sqrt[3]{x^2}}$.
2. В точке $x=1$ производная равна нулю, а в точке $x=0$ она обращается в бесконечность. Обе эти критические точки принадлежат отрезку $[-1; 8]$.
3. Находим значения исходной функции в критических точках и на концах отрезка: $f(0) = 1$; $f(1) = 3.25$; $f(8) = -5$; $f(-1) = -2.75$. Ясно, что на отрезке $[-1; 8]$ исходная функция принимает наибольшее значение, равное 3.25 , в точке $x = 1$. Наименьшее значение, равное -5 , достигается в точке $x = 8$. ◀

Задача 3 (тест). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$, заданной на отрезке $[-1; 3]$.

² Отметим, что точки, где $f' = 0$, называются стационарными



1. Находим производную функции $f(x)$: $f'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$.
2. Точки $x = \pm 2, 0$, в которых производная обращается в нуль, являются критическими для данной функции. Однако только две из них, $x = 0$ и $x = 2$, принадлежат отрезку $[-1; 3]$.
3. Находим значения исходной функции в критических точках и на концах отрезка: $f(0) = 1$; $f(2) = -3$; $f(3) = 3.25$; $f(-1) = -0.75$. Ясно, что на отрезке $[-1; 3]$ исходная функция принимает наибольшее значение, равное 3,25, в точке $x = 3$. Её наименьшее значение, равное -3, достигается в точке $x = 2$. ◀

По аналогии решите самостоятельно следующие задачи.

Задачи 4 (тест). Найти наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

- i) $f(x) = 12x - x^3$, $a = -3$, $b = -1$; Ответ: $f_{\max} = -9$.
- ii) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$, $a = -1$, $b = 2$; Ответ: $f_{\max} = 5$.
- iii) $f(x) = 2x^3 - 9x^2$, $a = -1$, $b = 2$; Ответ: $f_{\max} = 0$.
- iv) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2$, $a = -1$, $b = 1$; Ответ: $f_{\max} = -2$.
- v) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, $a = 0$, $b = 2$; Ответ: $f_{\max} = 9$.
- vi) $f(x) = \frac{3}{2}x^4 - 6x + 3$, $a = -1$, $b = 2$; Ответ: $f_{\max} = 15$.

3.2 Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных

Рассмотрим для простоты только случай функции двух вещественных переменных.

Итак, пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на замкнутой ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$ и дифференцируема во всех ее внутренних точках. В этом случае она достигает своего наибольшего и наименьшего значения или во внутренней стационарной точке (если такая имеется) области D ³, или на границе области D . Поэтому, чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение, принимаемое функцией $f(x, y)$ на замкнутой ограниченной области D , нужно сравнить между собой значения этой функции во всех её стационарных точках, являющихся внутренними для области D , с наибольшим (наименьшим) значением этой функции на границе области D . Далее будем предполагать, что всю границу L области D можно представить в виде объединения нескольких непересекающихся частей, каждая из которых является либо графиком некоторой функции $y = \alpha(x)$, либо $x = \beta(y)$.

Задача 1*. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

³ Точка $M_0(x_0, y_0) \in D$ называется стационарной для функции $f(x, y)$, если её координаты x_0 и y_0 удовлетворяют системе уравнений стационарности: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

$$z = F(M) \equiv f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10,$$

если $M(x, y)$ принадлежит замкнутой ограниченной области $D = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 4\}$.

► Данная область представляет собой треугольник, ограниченный прямой $x + y = 4$ и координатными осями (см. Рис. 1).

1. Сначала найдем все стационарные точки функции $f(x, y)$ внутри области D . Для этого рассмотрим систему уравнений стационарности:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 5 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x - 4 = 0, \end{cases}$$

единственным решением которой является точка $M_0(2; 1)$, принадлежащая данной области D (см. Рис. 1). В точке M_0 найдем, что $f(x, y) = f(2, 1) = 3$.

2. Изучим поведение функции на границе области D . Очевидно, что вся граница L этой области разбивается на три прямолинейных участка OB , OA , AB . Первый из них, OB , лежит на оси Ox и является графиком функции $y_1 = 0$ при $x \in [0; 4]$. На этом участке исходная функция $f(x, y)$ принимает вид:

$$z = f(x, y(x)) \equiv \varphi_1(x) = x^2 - 5x + 10 \quad (*)$$

при $x \in [0; 4]$. Будем искать наибольшее и наименьшее значения функции $\varphi_1(x)$ на отрезке $[0; 4]$. Нетрудно видеть, что $\varphi_1'(x) = 0$ в точке $x_1 = 5/2$, причем $x_1 \in [0; 4]$. В этой критической точке $\varphi_1(x_1) = \varphi_1(5/2) = 15/4$. (На плоскости xOy критической точке x_1 функции $\varphi_1(x)$ соответствует точка $M_1(5/2; 0)$, для которой $f(M_1) = \varphi_1(x_1) = \varphi_1(5/2) = 15/4$.) На концах отрезка $[0; 4]$ функция $\varphi_1(x)$ принимает значения: $\varphi_1(0) = 10$, $\varphi_1(4) = 6$. Нетрудно видеть, что числа $\varphi_1(0)$ и $\varphi_1(4)$ совпадают со значениями функции $f(x, y)$ в точках $O(0; 0)$ и $B(4; 0)$, т.е.

$\varphi_1(0) = f(O) = f(0; 0) = 10$ и $\varphi_1(4) = f(B) = f(4; 0) = 6$. Следовательно, на участке OB границы области D функция $f(x, y)$ в точке M_1 достигает наименьшего значения, равного $15/4$, а в точке O — наибольшего значения, равного 10 .

На участке границы OA , который является графиком функции $x(y) = 0$ при $y \in [0; 4]$, функция $f(x, y)$ принимает вид:

$$z = f(x(y), y) \equiv \psi(y) = y^2 - 4y + 10$$

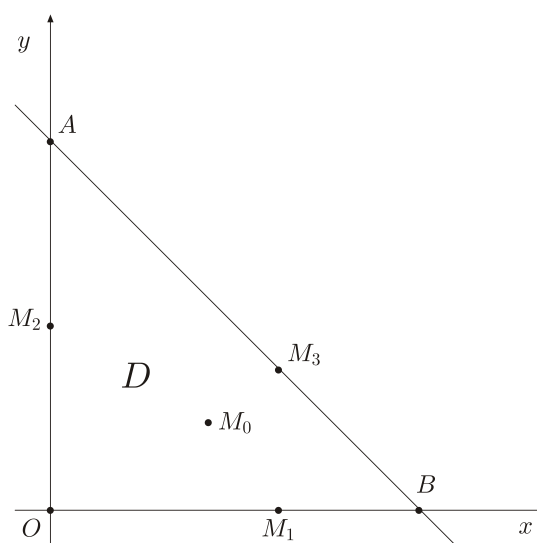


Рис. 1

при $y \in [0; 4]$. Эта функция имеет на отрезке $[0; 4]$ только одну критическую точку $y_1 = 2$ (на плоскости xOy ей соответствует точка $M_2(0;2)$), где $\psi(y_1) = \psi(2) = 6$ (очевидно, что $\psi(y_1) = f(M_2) = 6$). На концах отрезка $[0;4]$ $\psi(y)$ принимает значения $\psi(0) = 10$ и $\psi(4) = 10$ (таким образом, $\psi(0) = f(O) = 10$ и $\psi(4) = f(A) = 10$, где точки O и A имеют координаты: $O=O(0;0)$ и $A=A(0;4)$). Следовательно, на участке границы OA области D функция $f(x,y)$ достигает наибольшего значения, равного 10, в точках O и A , а в точке M_2 — наименьшего значения, равного 6.

Участок AB границы области D является графиком функции $y_2 = 4 - x$ при $x \in [0; 4]$. Следовательно, на AB функция $f(x,y)$ (при $x \in [0; 4]$) принимает вид:

$$z = f(x, y_2(x)) \equiv \varphi_2(x) = x^2 - 5x + 10, \quad (**)$$

то есть $\varphi_2(x) = \varphi_1(x)$ (сравните соотношения $(*)$ и $(**)$). Поэтому ее наибольшее и наименьшее значения на отрезке $[0;4]$ такие же, как и у функции $\varphi_1(x)$: наименьшее значение, равное $15/4$, функция $\varphi_2(x)$ достигает в точке $x_1 = 5/2$, а ее наибольшее значение, равное 10, достигается в точке $x = 0$. (Так как $y_2(x_1) = 3/2$ и $y_2(0) = 4$, то это равносильно тому, что на участке AB границы области D функция $f(x,y)$ принимает наибольшее значение, равное 10, в точке $A(0;4)$ плоскости xOy , а наименьшее, равное $15/4$, в точке $M_3(5/2;3/2)$).

Наконец, сравнивая значения функции $f(x,y)$ в стационарной точке $M_0(2;1)$ с наибольшими (наименьшими) значениями этой функции на участках OA , OB и AB границы области D , мы видим, что ее наибольшее значение, равное 10, достигается в точках $O(0;0)$ и $A(0;4)$. Наименьшее значение, равное 3, $f(x,y)$ достигает в стационарной, внутренней для области D , точке $M_0(2;1)$. ◀

Утверждение I. Если границей замкнутой области D является замкнутая ломаная линия (составленная из прямолинейных отрезков), а сама функция имеет линейный вид, т.е. $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$, то наибольшее и наименьшее значения такой функции достигаются в точках излома границы области D .

Задача 2 (тест). Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = f(x, y) = 2x - y,$$

если переменные x, y удовлетворяют системе ограничений:

$$\{(x, y): x \geq 0, y \geq 2, y \leq 5, x + y \leq 8\}.$$

► Нетрудно видеть, что при ограничениях, наложенных на x, y условиями задачи, эти переменные изменяются в замкнутой ограниченной области D , изображенной на Рис. 2. Так как в нашем случае выполнены все условия **Утверждения I**, то для решения задачи достаточно найти значения исходной функции в точках излома границы ее области определения, т.е. в точках $(0;2)$, $(0;5)$, $(3;5)$, $(6;2)$. Имеем:

$$\begin{aligned} f(x=0, y=2) &= -2, & f(x=0, y=5) &= -5, \\ f(x=3, y=5) &= 1, & f(x=6, y=2) &= 10. \end{aligned}$$

Сравнивая полученные значения, видим, что наименьшее значение, равное -5, исходная функция достигает в точке $(0;5)$. Наибольшее значение, равное 10, исходная функция достигает в точке $(6;2)$. ◀

Замечание. Утверждение I, сформулированное для функций двух переменных, может быть обобщено на случай функций трех переменных: Пусть линейная функция

$f(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$ определена в замкнутой ограниченной области D трехмерного евклидова пространства, представляющей из себя многогранник⁴. Тогда наибольшее и наименьшее значения такой функции достигаются в вершинах многогранника D .

Для самостоятельной работы предлагаются следующие задачи.

Задача 3*. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z(x, y)$ на замкнутой ограниченной области D , если:

- i) $z(x, y) = xy^2 + 4xy + 4x - 8$, $D = \{(x, y): -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 0\}$;
- ii) $z(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 3x + 3y + 7$, $D = \{(x, y): x \geq 0, y \leq 0, x - y \leq 3\}$;
- iii) $z(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3y + 5$, $D = \{(x, y): -2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$;
- iv) $z(x, y) = 2x + y - xy$, $D = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$;
- v) $z(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $D = \{(x, y): 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3\}$.

Задача 4 (тест). Используя **Утверждение I**, найти наибольшее и наименьшее значения функции $z(x, y)$ на замкнутой ограниченной области D , если:

- i) $z(x, y) = 1 + 2x + 3y$, $D = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$;
- ii) $z(x, y) = 7x - 4y + 4$, $D = \{(x, y): -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 0\}$;
- iii) $z(x, y) = 5x + y + 7$, $D = \{(x, y): x \geq 0, y \leq 0, x - y \leq 3\}$;
- iv) $z(x, y) = 3x - 2y - 5$, $D = \{(x, y): -2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$;
- v) $z(x, y) = 2x + y - 10$, $D = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$;
- vi) $z(x, y) = 2y - 3x + 5$, $D = \{(x, y): 2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2x\}$.

Указание. Решение этих примеров аналогично решению **Задачи 2** данного параграфа.

3.3 Задачи на условный экстремум

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в области D двумерного евклидова пространства. Допустим, что через область D проходит некоторая кривая L , заданная уравнением $\varphi(x, y) = 0$, и нужно найти экстремумы функции $f(x, y)$ только среди тех её значений, которые соответствуют точкам кривой L . Такие экстремумы называются *условными экстремумами* функции $z = f(x, y)$ на кривой L . Таким образом, при нахождении условных экстремумов аргументы x и y функции $z = f(x, y)$ уже нельзя рассматривать как независимые переменные: они связаны между собой соотношением $\varphi(x, y) = 0$, которое называют *уравнением связи*.

⁴ граница такой области — поверхность, состоящая из плоских многоугольников

Один из методов нахождения условного экстремума функции $z = f(x, y)$ при наличии связи $\varphi(x, y) = 0$ (1)

состоит в следующем. Пусть уравнение связи (1) определяет, например, переменную y как однозначную функцию аргумента x : $y = \psi(x)$. Подставляя в $z = f(x, y)$ вместо y выражение $\psi(x)$, получаем функцию одного аргумента

$$z = f(x, \psi(x)) \equiv F(x),$$

в которой условие связи уже учтено. Экстремум (безусловный) функции $F(x)$ является искомым условным экстремумом функции $z = f(x, y)$ при наличии связи (1).

Пример (тест). Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ (*) при условии, что $x + y - 1 = 0$ (**).

► Из уравнения связи (**) находим $y = 1 - x$. Подставляя это выражение в (*), получаем функцию одной переменной x : $z = x^2 + (1 - x)^2 \equiv F(x)$. Точка $x = 1/2$ является единственной критической точкой $F(x)$, в которой, очевидно, расположен её минимум. Соответственно, точка плоскости $(x = 1/2, y = 1/2)$ будет точкой условного минимума исходной функции (*), в которой она принимает значение $z = 1/2$. ◀

Задача 1 (тест). Найти экстремум (максимум или минимум) функции $z = f(x, y)$ при условии $\phi(x, y) = 0$, если:

$$i) \quad f(x, y) = xy, \quad \phi(x, y) = x + y - 4;$$

$$ii) \quad f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \phi(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1;$$

$$iii) \quad f(x, y) = x^2 - y^2, \quad \phi(x, y) = x + 2y - 6;$$

$$iv) \quad f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \phi(x, y) = x - 2y - 5;$$

$$v) \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10, \quad \phi(x, y) = x + y - 4.$$

Задача 2*. Найти экстремум функции трёх переменных $f(x, y, z) = x + y + z^2$ при наличии двух условий (связей): $z - x = 1$, $y - zx = 1$.

Указание. Решить уравнения связи относительно переменных y и z . Полученные выражения, зависящие только от x , подставить в исходную функцию, которая станет функцией одной переменной x .

IV. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1 Неопределённый интеграл

Поскольку методам интегрирования функций одной вещественной переменной уделяется значительное внимание на лекциях и семинарах в университете «Дубна», в этом разделе пособия мы приводим (без детального разбора решений) типичные задачи на эту тему, которые встречаются на ежегодных тестированиях студентов по математике.

Задача 1 (тест). Найти множество первообразных функции $f(x)$, если:

- i) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, Ответ: $\frac{3}{5}x^{5/3} + C$; ii) $f(x) = \sqrt[5]{x}$; iii) $f(x) = \sqrt[7]{x^2}$;
 iv) $f(x) = \sin 3x$, Ответ: $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$; v) $f(x) = \sin 7x$; vi) $f(x) = \sin 11x$;
 vii) $f(x) = \cos 4x$, Ответ: $\frac{1}{4}\sin 4x + C$; vii) $f(x) = \cos 7x$; viii) $f(x) = \cos 11x$;
 ix) $f(x) = xe^{x^2}$, Ответ: $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$; x) $f(x) = e^{2x+3}$.

Рекомендация. При решении **Задач 2,3** используйте таблицу простейших неопределённых интегралов, а также формулу:

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C,$$

где $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$, то есть

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Задача 2 (тест). Вычислить неопределённые интегралы:

- i) $\int \sin(3x + 2) dx$, Ответ: $-\frac{1}{3}\cos(3x + 2) + C$;
 ii) $\int e^{2x+1} dx$, Ответ: $\frac{1}{2}e^{2x+1} + C$;
 iii) $\int e^{-7x/3} dx$, Ответ: $-\frac{3}{7}e^{-7x/3} + C$;
 iv) $\int \cos(5x + 3) dx$; v) $\int \sin(4x + 1) dx$;
 vi) $\int 2^{5x+3} dx$; vii) $\int e^{\alpha x + \beta} dx$.

Задача 3*. Вычислить неопределённые интегралы:

- i) $\int (3x + 4)^{10} dx$; ii) $\int \sqrt[5]{3x + 5} dx$; iii) $\int (\alpha x + \beta)^\gamma dx$;
 iv) $\int \frac{dx}{7x - 2}$; v) $\int \frac{dx}{\alpha x + \beta}$; vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (2x + 1)^2}}$;
 vii) $\int \frac{dx}{\cos^2(5x - 7)}$; viii) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x + 1)}$; ix) $\int \frac{dx}{1 + (5x - 7)^2}$.

Задача 4*. Методом замены переменных вычислить следующие интегралы:

- i) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; ii) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(x^4 + 2)^2}}$; iii) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$;
 iv) $\int \frac{\arctg^2 x}{1 + x^2} dx$; v) $\int \cos x \sin^{25} x dx$; vi) $\int \frac{\operatorname{tg}^6 x}{\cos^2 x} dx$;
 vii) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$; viii) $\int x^3 e^{-x^4} dx$.

Задача 5 (тест). Установите соответствие между интегралами и разложениями подынтегральных функций на элементарные дроби:

$$\begin{aligned}
 &1) \int \frac{(3x-1)dx}{(x-1)(x+3)}; \quad 2) \int \frac{dx}{x^2(x-1)}; \quad 3) \int \frac{(2x+1)dx}{x(x^2+1)}; \quad 4) \int \frac{(5x-4)dx}{x^2(x^2+9)}. \\
 &a) \frac{A}{x^2} + \frac{C}{x^2+9}; \quad b) \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}; \quad c) \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2+1}; \quad d) \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+9}; \\
 &e) \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}; \quad f) \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}. \quad \text{Ответ: } 1) \leftrightarrow e); 2) \leftrightarrow b); 3) \leftrightarrow f); 4) \leftrightarrow d).
 \end{aligned}$$

Задача 6 (тест). Какие из функций:

$$\begin{aligned}
 &1) \quad F_1(x) = 3x^3 - 2x; \quad 2) \quad F_2(x) = x^3 - x^2 + x; \quad 3) \quad F_3(x) = x^3 - x^2 + x + 1; \\
 &4) \quad F_4(x) = x^3 + x^2 + x - 1; \quad 5) \quad F_5(x) = x^3 - x^2 + x - 5; \quad 6) \quad F_6(x) = x^3 - x^2 - x;
 \end{aligned}$$

являются первообразными функции $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$?

V. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

5.1 Градиент и производная по направлению

Пусть в некоторой области D трехмерного евклидова пространства задана дифференцируемая функция трех переменных $f(x,y,z)$. (В этом случае иногда говорят, что в области D задано скалярное поле $f(x,y,z)$.) **Градиентом** скалярного поля $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (или просто градиентом функции $f(x,y,z)$) называется вектор вида

$$\vec{\nabla} f(M_0) \equiv \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \vec{k}, \quad (1)$$

начало которого находится в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. (Здесь $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы, одинаково направленные с соответствующими координатными осями OX , OY и OZ .) Таким образом, каждой точке области D ставится в соответствие вектор $\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0)$ или, иными словами, на области D задается *векторное поле* $\vec{\nabla} f(x, y, z)$.

Замечание. Понятие градиента тривиальным образом обобщается как на случай функции большего числа переменных, так и на случай функций двух и одной переменных. Так, если дана дифференцируемая функция двух переменных $u(x,y)$, то ее градиентом в точке $M(x,y)$ называется вектор $\vec{\nabla} u(M) \equiv \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \vec{j}$. В случае же дифференцируемой функции одной переменной $f(x)$ ее градиентом можно назвать вектор вида $\vec{\nabla} f(x) = f'(x) \vec{i}$.

Производной скалярного поля (или просто функции) $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ в направлении единичного вектора $\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, где $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$,⁵ называется выражение вида

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} \equiv \cos \alpha \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}, \quad (2)$$

которое есть ни что иное, как координатное представление для скалярного произведения двух векторов $\vec{l}$ и $\vec{\nabla} f(M_0)$. (В частности, если эти векторы ортогональны, то выражение (2) равно нулю. И наоборот, если производная функции $f(x,y,z)$ по некоторому направлению $\vec{l}$ равна нулю, то вектор её градиента, $\vec{\nabla} f(M_0)$, перпендикулярен $\vec{l}$.) Аналогично, в случае (скалярного поля) функции $u(x,y)$ двух переменных ее производной в точке $M_0(x_0,y_0)$ в направлении единичного вектора $\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta)$, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$, называется выражение вида

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} \equiv \cos \alpha \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}. \quad (3)$$

Замечание. Очень существенным при нахождении производной функции по данному направлению является то обстоятельство, что в определения (2) и (3) входят координаты *единичного* вектора. Так как данное направление может быть задано и вектором $\vec{a}$ с не равной единице длиной, то перед нахождением производной по направлению $\vec{a}$ необходимо построить единичный вектор вида $\vec{l} = \vec{a}/|\vec{a}|$, координаты которого затем использовать в формулах (2) и (3).

Рассмотрим несколько типичных задач, связанных с понятиями градиента функции и ее производной по направлению.

Задача 1*. Найти производную скалярного поля $f(x,y,z)$ по направлению вектора $\vec{a}$ в точке M_0 , а также его градиент $\vec{\nabla} f(M_0)$, если:

- i) $f(x, y, z) = \sqrt{x + \frac{y}{z}}, \quad \vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \quad M_0(2; 4; 1);$
- ii) $f(x, y, z) = \frac{x + y}{y + z}, \quad \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \quad M_0(2; 1; 5);$
- iii) $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x + y}{2x - z}}, \quad \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}, \quad M_0(1; 3; 1);$
- iv) $f(x, y, z) = \left(\frac{x + 2y}{x + z^2}\right)^3, \quad \vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \quad M_0(1; 1; 1);$
- v) $f(x, y, z) = x \ln(y + 2z), \quad \vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}, \quad M_0(4; -1; 1).$

► Ниже мы приводим подробное решение случая i). Решения остальных задач находятся аналогичным образом.

⁵ Координаты любого вектора, длина которого равна единице, представляют собой косинусы углов, образованных данным вектором с соответствующими осями координат.

- 1) Прежде всего, необходимо найти частные производные исходной функции

$f(x, y, z) = \sqrt{x + \frac{y}{z}}$ в точке $M_0(2; 4; 1)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{x + \frac{y}{z}}} \bigg|_{M=M_0} = \frac{1}{2\sqrt{6}}; & \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} &= \frac{1}{2z\sqrt{x + \frac{y}{z}}} \bigg|_{M=M_0} = \frac{1}{2\sqrt{6}}; \\ \frac{\partial f(M_0)}{\partial z} &= \frac{-y}{2z^2\sqrt{x + \frac{y}{z}}} \bigg|_{M=M_0} = \frac{-2}{\sqrt{6}}.\end{aligned}\quad (4)$$

- 2) Нетрудно видеть, что длина вектора $\vec{a}$ не равна единице. Действительно, $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$. Поэтому строим единичный вектор

$$\vec{l} \equiv \vec{a}/|\vec{a}| = \frac{\vec{i}}{\sqrt{6}} - \frac{\vec{j}}{\sqrt{6}} + \frac{2\vec{k}}{\sqrt{6}}, \quad (5)$$

координаты которого есть направляющие косинусы данного направления, т.е.

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}; \quad \cos \beta = \frac{-1}{\sqrt{6}}; \quad \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}. \quad (6)$$

- 3) Теперь, используя значения частных производных (4) и направляющих косинусов (6) в формуле (2), легко находим производную исходной функции в точке M_0 по направлению вектора $\vec{a}$:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} + \frac{-1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{6}} = -\frac{2}{3}.$$

- 4) Градиент исходной функции в точке M_0 находится с помощью формулы (1), в которой для частных производных необходимо использовать результаты (4):

$$\vec{\nabla} f(M_0) = \frac{1}{2\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{1}{2\sqrt{6}}\vec{j} - \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{k}. \quad \blacktriangleleft$$

Следующие задачи предлагается решить самостоятельно.

Задача 2 (тест). Найти производную скалярного поля $u(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении единичного вектора $\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta)$, если:

- | | | |
|-----------------------|----------------|---|
| i) $u = 3x^2 + y^2,$ | $M_0(1; -1),$ | Ответ: $\frac{\partial u}{\partial l} = 6\cos \alpha - 2\cos \beta;$ |
| ii) $u = x^2 - 2y^2,$ | $M_0(1; -1),$ | Ответ: $\frac{\partial u}{\partial l} = 2\cos \alpha + 4\cos \beta;$ |
| iii) $u = x^2 - 4y,$ | $M_0(-1; -1),$ | Ответ: $\frac{\partial u}{\partial l} = -2\cos \alpha - 4\cos \beta;$ |
| iv) $u = 5x^2 + y^2,$ | $M_0(1; 2),$ | Ответ: $\frac{\partial u}{\partial l} = 10\cos \alpha + 4\cos \beta;$ |
| v) $u = -3x - 2y^2,$ | $M_0(1; -2),$ | Ответ: $\frac{\partial u}{\partial l} = -3\cos \alpha + 8\cos \beta.$ |

Задача 3 (тест). Найти градиент скалярного поля $f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если:

i) $f = x^2 - xz + yz, \quad M_0(0; 1; 1), \quad \text{Ответ: } \vec{\nabla}f(M_0) = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k};$

ii) $f = z^2 + y^2 - xz, \quad M_0(1; 0; 1), \quad \text{Ответ: } \vec{\nabla}f(M_0) = -\vec{i} + \vec{k};$

iii) $f = y^2 + xz + z^2, \quad M_0(1; -1; 0), \quad \text{Ответ: } \vec{\nabla}f(M_0) = -2\vec{j} + \vec{k}.$

Указание. Если возникают какие-либо проблемы при решении **Задач 2 и 3**, советуем еще раз внимательно разобрать решение случая i) **Задачи 1**.

5.2 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

В самом общем случае поверхность S в пространстве понимается как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют некоторому уравнению

$$F(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

где предполагается, что функция $F(x,y,z)$ дифференцируема и имеет непрерывные частные производные в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Пусть точка M_0 лежит на поверхности S .⁶ Она называется *обыкновенной* точкой этой поверхности, если вектор градиента функции $F(x,y,z)$ отличен от нуля в этой точке, то есть $\vec{\nabla}F(M_0) \neq 0$. Из курса математического анализа известно, что все касательные прямые, проведенные к поверхности в обыкновенной точке, лежат в одной плоскости. Она называется *касательной плоскостью* к поверхности в её обыкновенной точке. Очевидно, что смещаясь из точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ по любому направлению и находясь при этом на данной поверхности, мы не получаем отличного от нуля приращения функции $F(x,y,z)$

(в этом случае мы смещаемся вдоль некоторой касательной прямой к поверхности S). Следовательно, производная функции $F(x,y,z)$ вдоль направления, заданного этой касательной прямой, равна нулю, что в свою очередь означает перпендикулярность вектора градиента $\vec{\nabla}F(M_0)$ не только к данной касательной прямой, но и ко всей касательной плоскости.⁷ Это наблюдение позволяет вывести уравнение касательной плоскости к поверхности S в её обыкновенной точке.

Предположим, что точка с координатами (X,Y,Z) находится на плоскости, которая касается поверхности (1) в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда, как ясно из вышеприведенных рассуждений, вектор с координатами $(X-x_0, Y-y_0, Z-z_0)$ параллелен касательной плоскости, то есть перпендикулярен вектору градиента $\vec{\nabla}F(M_0)$. В координатах этих векторов данное условие имеет следующий вид

⁶ Поверхность S , заданную уравнением (1), называют иногда поверхностью нулевого уровня функции $F(x,y,z)$. В общем случае поверхностью уровня C функции $F(x,y,z)$ называется множество точек, удовлетворяющих уравнению $F(x,y,z) = C$.

⁷ Иными словами, $\vec{\nabla}F(M_0)$ ортогонален поверхности, отвечающей уравнению (1), в её обыкновенной точке M_0 . В общем случае, если градиент некоторой функции $F(x,y,z)$ в точке M_0 отличен от нуля, то он направлен перпендикулярно к поверхности уровня $F(x,y,z) = C$, где $C = F(M_0)$.

$$(X - x_0) \frac{\partial F(M_0)}{\partial x} + (Y - y_0) \frac{\partial F(M_0)}{\partial y} + (Z - z_0) \frac{\partial F(M_0)}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

которое носит название уравнения касательной плоскости к поверхности (1).

Прямая, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ и перпендикулярна касательной плоскости к поверхности S в этой точке, называется *нормалью* к этой поверхности в точке M_0 . Очевидно, что нормаль параллельна вектору градиента. Следовательно, её уравнение в координатном виде имеет вид

$$\frac{(X - x_0)}{\partial F(M_0)/\partial x} = \frac{(Y - y_0)}{\partial F(M_0)/\partial y} = \frac{(Z - z_0)}{\partial F(M_0)/\partial z}, \quad (3)$$

где (X, Y, Z) – координаты точки, лежащей на нормали.

Задача 1*. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если:

$$i) \quad F = x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 17, \quad M_0(2; 1; -1);$$

$$ii) \quad F = z^2x - 2x^2 - 4y^2 - 6, \quad M_0(2; 1; 3);$$

$$iii) \quad F = z + \sqrt{xy^2 + 2z} - 10, \quad M_0(1; 2; 6);$$

$$iv) \quad F = xy^2 + \frac{2y}{z+1} - 4, \quad M_0(3; 1; 1);$$

$$v) \quad F = z + 2x + \sqrt{y^2 + 4z^2} - 11, \quad M_0(2; 3; 2);$$

$$vi) \quad F = z - \ln(x + y + z) - 1, \quad M_0(1; -1; 1).$$

► Ниже мы приводим подробное решение только случая *i*); остальные задачи решаются аналогично. Найдем частные производные функции $F(x, y, z)$ в точке $M_0(2; 1; -1)$:

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x} = 2z \Big|_{M=M_0} = 4; \quad \frac{\partial F(M_0)}{\partial y} = 8y \Big|_{M=M_0} = 8; \quad \frac{\partial F(M_0)}{\partial z} = 18z \Big|_{M=M_0} = -18.$$

Используя выражение (2), теперь нетрудно написать уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке $M_0(2; 1; -1)$:

$$(X - 2) \cdot 4 + (Y - 1) \cdot 8 + (Z + 1) \cdot (-18) = 0.$$

Тогда как, уравнение нормали к поверхности в точке M_0 имеет вид:

$$\frac{(X-2)}{4} = \frac{(Y-1)}{8} = \frac{(Z+1)}{-18} \cdot \boxed{?} \quad \blacktriangleleft$$

Задача 2*. Напишите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если:

$$i) \quad z = x^2y + \frac{y^2}{x}, \quad M_0(1; 1; 2); \quad ii) \quad z = x + y \ln(x + y), \quad M_0(2; -1; 2);$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad z &= \sin x \sin y, & M_0\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right); & \quad \text{iv)} \quad z = x \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & M_0(1; 1; \frac{\pi}{4}); \\ \text{v)} \quad z &= x^2 - \frac{x}{x+y}, & M_0(4; -2; 1); & \quad \text{vi)} \quad z = x \ln(x^2 - 3y), & M_0(2; 1; 0). \end{aligned}$$

Указание. Для решения этих задач необходимо представить уравнение поверхности в виде (1), то есть $F(x, y, z) \equiv f(x, y) - z$, а потом действовать по схеме, разобранный выше при решении **Задачи 1** случай i).

Частные случаи нормали к поверхности.

Уравнение нормали (3) есть на самом деле система двух уравнений для переменных $(X; Y; Z)$, которая, строго говоря, не определена, если хотя бы одна из частных производных функции $F(x, y, z)$ равна нулю (нельзя делить на ноль!). В последнем случае уравнение нормали (3) носит формальный характер, смысл которого можно прояснить следующим образом. Предположим для простоты, что в обыкновенной точке поверхности (1) только $\partial F(M_0)/\partial z = 0$. Тогда две первые дроби из (3) — явно конечные величины, равные третьей дроби, у которой в знаменателе — ноль. Такая дробь, $(Z - z_0)/0$, может быть конечной лишь при $(Z - z_0) = 0$ (т.к. в этом случае у нас будет выражение, представляющее собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которое может быть конечным!). Тогда уравнение нормали к поверхности (а на самом деле — система двух уравнений!) принимает вид

$$\frac{(X - x_0)}{\partial F(M_0)/\partial x} = \frac{(Y - y_0)}{\partial F(M_0)/\partial y}; \quad Z - z_0 = 0. \quad (4)$$

(Эта нормаль расположена в плоскости $Z - z_0 = 0$, параллельной координатной плоскости xOy .) По аналогии: если, например, $\partial F(M_0)/\partial y = 0$, $\partial F(M_0)/\partial z = 0$, то уравнение нормали (3) в точке M_0 формально имеет вид

$$\frac{(X - x_0)}{\partial F(M_0)/\partial x} = \frac{(Y - y_0)}{0} = \frac{(Z - z_0)}{0}.$$

Полагая в этом выражении числители дробей с нулевыми знаменателями также равными нулю, находим окончательно следующее уравнение нормали

$$Y - y_0 = 0, \quad Z - z_0 = 0. \quad (5)$$

Нормаль (5) проходит через точку (y_0, z_0) координатной плоскости yOz , параллельно координатной оси x .

Уравнения нормали в случаях, когда другие компоненты или пары компонент вектора градиента обращаются в нуль, получают аналогичным образом.

Задача 3*. Даны две точки $M_0(0; 0; 0)$ и $M_1(1; 1; -1/2)$ на поверхности $z = 0.5x^2 - xy$ (*). Напишите уравнение нормали к поверхности в каждой из этих точек.
► Приведем сначала уравнение поверхности (*) к виду (1):

$$F(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{2} - xy - z = 0.$$

Отсюда нетрудно получить компоненты вектора градиента функции $F(x, y, z)$ в произвольной точке $M(x, y, z)$:

$$\frac{\partial F(M)}{\partial x} = x - y, \quad \frac{\partial F(M)}{\partial y} = -x, \quad \frac{\partial F(M)}{\partial z} = -1.$$

Следовательно, формальное уравнение нормали к поверхности (*) в точке $M_0(0; 0; 0)$ имеет вид

$$\frac{X}{0} = \frac{Y}{0} = \frac{Z}{-1}.$$

Чтобы деление на ноль в этом выражении имело смысл, необходимо числители соответствующих дробей приравнять нулю. В результате получим

$$X = 0, \quad Y = 0.$$

Это и есть искомое уравнение нормали к данной поверхности в точке $M_0(0; 0; 0)$. Далее, в точке $M_1(1; 1; -1/2)$ справедливы соотношения $F'_x(M_1) = 0$, $F'_y(M_1) = -1$, $F'_z(M_1) = -1$, которые приводят к следующему формальному уравнению нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{X - 1}{0} = \frac{Y - 1}{-1} = \frac{Z + \frac{1}{2}}{-1}.$$

Отсюда, приравняв нулю числитель дроби с нулевым знаменателем, получаем уравнение нормали к поверхности (*) в точке $M_1(1; 1; -1/2)$ в окончательном виде:

$$X - 1 = 0, \quad \frac{Y - 1}{-1} = \frac{Z + \frac{1}{2}}{-1}. \quad \blacktriangleleft$$

Используя этот пример, решите самостоятельно следующие задачи.

Задача 4*. Напишите уравнение нормали к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если:

$$i) \quad F = zx - y^2 - \ln z - 1, \quad M_0(1; 0; 1);$$

$$ii) \quad F = z - x \ln(x + y + z) - 1, \quad M_0(0; 1; 1);$$

$$iii) \quad F = z + \sqrt{xy^2 + 2z} - 4, \quad M_0(0; 2; 2);$$

$$iv) \quad F = xy^2 + \frac{2y}{z + 1}, \quad M_0(0; 0; 0);$$

$$v) \quad F = z + 2x + \sqrt{y^2 + 4z^2} - 5, \quad M_0(1; 0; 1);$$

$$vi) \quad F = z - \ln(x + y + z) - 1, \quad M_0(0; 0; 1).$$

VI. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ДУ)

6.1 Задачи, связанные с основными понятиями ДУ

Задача 1 (тест). Даны дифференциальные уравнения:

$$i) \quad 2y''' + y' = 7x^4; \quad ii) \quad 5y'' - 3y' + y = 9x^4;$$

$$iii) \quad 6y' + 7y = x^9; \quad iv) \quad y''' - 2y'' + y = x^5.$$

Определить порядок каждого ДУ.

Задача 2 (тест). Дано дифференциальное уравнение $y' = F(k; x)$ (k – параметр). При каком значении k функция $y = \phi(x)$ является решением этого ДУ, если:

$$i) \quad F(k; x) = (2k + 3)x^3, \quad \phi(x) = x^4/4, \quad \text{Ответ: } k = -1;$$

$$ii) \quad F(k; x) = (k - 3)x^2, \quad \phi(x) = x^3 + 1, \quad \text{Ответ: } k = 6;$$

$$iii) \quad F(k; x) = (2k - 2)x^3, \quad \phi(x) = x^4, \quad \text{Ответ: } k = 3;$$

$$iv) \quad F(k; x) = (k - 1)x^2, \quad \phi(x) = x^3/3, \quad \text{Ответ: } k = 2.$$

Задача 3 (тест). Дано дифференциальное уравнение $y' = C$ (C – некоторая константа). При каком значении параметра α функция $y = \phi(\alpha; x)$ является решением этого ДУ, если:

$$i) \quad C = 2, \quad \phi(\alpha; x) = 2\alpha x + 3, \quad \text{Ответ: } \alpha = 1;$$

$$ii) \quad C = -3, \quad \phi(\alpha; x) = 3\alpha x + 2, \quad \text{Ответ: } \alpha = -1;$$

$$iii) \quad C = -2, \quad \phi(\alpha; x) = 2 - \alpha x, \quad \text{Ответ: } \alpha = 2;$$

$$iv) \quad C = 4, \quad \phi(\alpha; x) = 2\alpha x - 3, \quad \text{Ответ: } \alpha = 2.$$

Задача 4 (тест). Дано дифференциальное уравнение $F(x, y, y') = 0$. Какая из трёх функций $y_{1,2,3}(x)$ является его решением, если:

$$i) \quad F(x, y, y') = y' + \frac{y}{x} - \frac{1 + \ln x}{x}; \quad y_1 = \frac{1}{x}, \quad y_2 = \ln x, \quad y_3 = x^2 + 1;$$

Ответ: y_2 .

$$ii) \quad F(x, y, y') = y' - y \operatorname{tg} x - 1; \quad y_1 = \operatorname{tg} x, \quad y_2 = \frac{1}{\cos x}, \quad y_3 = 1 - \operatorname{tg} x;$$

Ответ: y_1 .

$$iii) \quad F(x, y, y') = y' + y - 3e^{2x}; \quad y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = e^{2x} + 2e^{-x}, \quad y_3 = e^{2x};$$

Ответ: y_3 .

$$iv) \quad F(x, y, y') = y' - \frac{2y}{x} + 2 - \frac{2}{x}; \quad y_1 = x^2 + 2x - 1, \quad y_2 = \frac{-2}{x}, \quad y_3 = e^{2x}.$$

$$v) \quad F(x, y, y') = y' + \frac{y}{1 + x^2} - \frac{1 + \operatorname{arctg} x}{1 + x^2}; \quad y_1 = x^2 + 1, \quad y_2 = \arcsin x, \quad y_3 = \operatorname{arctg} x.$$

$$vi) \quad F(x, y, y') = y' - \frac{xy}{x^2 - 1} - x; \quad y_1 = 4 + \ln x, \quad y_2 = x^2 - 1, \quad y_3 = e^x + 1.$$

6.2 Системы дифференциальных уравнений

Теорема. Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (1)$$

с постоянными коэффициентами a, d, c, d . Тогда эту систему можно свести к дифференциальному уравнению вида $x'' + Ax' + Bx = 0$, где

$$A = -(a + d), \quad B = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \equiv ad - cb. \quad (2)$$

► Выразим $y(t)$ из первого уравнения системы (1), $y = (x' - ax)/b$, и подставим полученное выражение во второе уравнение этой системы. В результате имеем:

$$y' = cx + \frac{d(x' - ax)}{b}. \quad (3)$$

Далее, продифференцируем первое уравнение по t : $x'' = ax' + by'$. В это выражение подставим вместо y' выражение (3). В результате, после приведения подобных членов, получаем уравнение

$$x'' - (a + d)x' + (ad - bc)x = 0. \quad \square \quad (4)$$

Учитывая обозначения (2), убеждаемся в справедливости утверждения теоремы. ◀

Упражнение. Докажите самостоятельно, что систему (1) можно свести к уравнению

$$y'' - (a + d)y + (ad - bc)y = 0,$$

то есть к тому же самому уравнению (4), но только относительно неизвестной функции $y(t)$.

Задача 5 (тест). Даны системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} i) \quad \begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = x - 2y; \end{cases} \quad ii) \quad \begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 5x + 6y; \end{cases} \quad iii) \quad \begin{cases} x' = -x - 4y, \\ y' = -2x + 3y; \end{cases} \\ iv) \quad \begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 2x - y; \end{cases} \quad v) \quad \begin{cases} x' = -3x + y, \\ y' = 4x - 5y; \end{cases} \quad vi) \quad \begin{cases} x' = 4x - 2y, \\ y' = -x + 7y. \end{cases} \end{aligned}$$

Используя предыдущую **Теорему**, свести каждую из этих систем к ДУ вида $x'' + Ax' + Bx = 0$.

6.3 Дифференциальные уравнения первого порядка

Задача 1 (тест). Какие из нижеперечисленных уравнений являются однородными ДУ:

$$i) \quad y' = \frac{x}{y}(e^{x/y} + 1); \quad ii) \quad y' = \frac{-y^2 + x + 12}{2x - 3y};$$

$$iii) \quad y' = xy^2 + 2x^2y; \quad iv) \quad (x^4 + y^4)dx + x^2y^2dy = 0.$$

Задача 2 (тест). Напишите общий интеграл для каждого из ДУ:

$$i) \quad \frac{dy}{y^2} = xdx; \quad ii) \quad \frac{dx}{x^2} = \cos y dy; \quad iii) \quad \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{1 + x^2}; \quad iv) \quad \frac{dy}{y} = \sin x dx;$$

$$v) \quad e^y dy = \frac{dx}{x}; \quad vi) \quad ydy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad vii) \quad \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x}; \quad viii) \quad \frac{dy}{\cos^2 y} = e^{-x} dx.$$

Задача 3 (тест). Найти частное решение следующих ДУ:

$$i) \quad xy' = y, \quad y(4) = 8; \quad ii) \quad y' = 2x + 5, \quad y(1) = 10; \quad iii) \quad y' - 4 = 3x^2, \quad y(0) = 10.$$

Задача 4 (тест). В каждом из нижеперечисленных ДУ найти частное решение $y(x)$, удовлетворяющее соответствующему начальному условию, а также определить значение этого решения в точке x_0 , т.е. $y(x_0)$, если:

$$i) \quad y' = \frac{y-1}{x}, \quad y(2) = 3; \quad \text{Найти } y(1).$$

Ответ: $y(1) = 2$.

$$ii) \quad y' = \frac{y}{x-1}, \quad y(2) = 1; \quad \text{Найти } y(1).$$

Ответ: $y(1) = 0$.

$$iii) \quad y' = \frac{y-1}{x-2}, \quad y(1) = -1; \quad \text{Найти } y(1.5).$$

Ответ: $y(1.5) = 0$.

$$iv) \quad y' = \frac{y+2}{x+3}, \quad y(-2) = -1; \quad \text{Найти } y(3).$$

Ответ: $y(3) = 4$.

$$v) \quad y' = y \cdot \cos 2x, \quad y(0) = 1; \quad \text{Найти } y(3\pi).$$

Ответ: $y(3\pi) = 1$.

Задача 5 (тест). Установите соответствие между ДУ:

$$i) \quad y' = \frac{x^2}{y^2}; \quad ii) \quad y' = \frac{x^3}{y^3}; \quad iii) \quad y' = \frac{x^4}{y^4}; \quad iv) \quad y' = \frac{x}{y};$$

и их общими решениями:

$$a) \quad y = \sqrt{x^5 + C}; \quad b) \quad y = \sqrt[4]{x^4 + C}; \quad c) \quad y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^3 + C}; \quad d) \quad y = \sqrt[3]{x^3 + C};$$

$$e) \quad y = \sqrt{x^2 + C}. \quad \text{Ответ:} \quad i) \leftrightarrow d); \quad ii) \leftrightarrow b); \quad iii) \leftrightarrow a); \quad iv) \leftrightarrow e).$$

Задача 6 (тест). Установите соответствие между ДУ:

$$i) \quad y' = x^2y^4; \quad ii) \quad y' = x^5y^7; \quad iii) \quad y' = x^2y^5; \quad iv) \quad y' = x^3y^6;$$

и их общими решениями:

$$a) \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{C-x^3}}; \quad b) \quad y = \frac{1}{\sqrt[5]{C-\frac{5x^4}{4}}}; \quad c) \quad y = \frac{1}{3\sqrt[3]{C+x^3}}; \quad d) \quad y = \frac{1}{\sqrt[4]{C-\frac{4x^3}{3}}};$$

$$e) \quad y = \frac{1}{\sqrt[6]{C-x^6}};$$

Ответ: i)↔a); ii)↔e); iii)↔d); iv)↔b).

6.4 Линейные однородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным *однородным* ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + py' + q = 0, \quad (1)$$

где $y \equiv y(x)$ – неизвестная функция от x ; p, q – постоянные числа. Чтобы найти общее решение $y_{об}(x)$ уравнения (1), необходимо сначала найти два его линейно независимых частных решения $y_{1,2}(x)$. Тогда $y_{об}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Предположим, что одно из частных решений, например $y_1(x)$, имеет вид

$$y_1 = e^{kx}, \quad \text{где } k = \text{const.} \quad (2)$$

Подставляя функцию (2) в уравнение (1), находим

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то k должно удовлетворять алгебраическому уравнению второго порядка

$$k^2 + pk + q = 0, \quad (3)$$

которое называется *характеристическим уравнением* для ДУ (1).

Задача 1 (тест). Запишите характеристическое уравнение для каждого линейного однородного ДУ:

$$i) \quad y'' + 15y' + 2y = 0, \quad \text{Ответ: } k^2 + 15k + 2 = 0.$$

$$ii) \quad y'' - 6y' + 5y = 0, \quad \text{Ответ: } k^2 - 6k + 5 = 0.$$

$$iii) \quad y'' + 17y' - 18y = 0; \quad iv) \quad y'' + 3y' + 2y = 0;$$

$$v) \quad y'' + 6y' - 7y = 0; \quad vi) \quad y'' + y' + 5y = 0.$$

В зависимости от знака дискриминанта характеристического уравнения (3),

$D = \frac{p^2}{4} - q$, принято записывать общее решение дифференциального уравнения (1) в одном из следующих видов.

I. Если $D = \frac{p^2}{4} - q > 0$, то характеристическое уравнение (3) имеет два различных действительных корня

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

В этом случае функции $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}$ будут линейно независимы, и каждая из них является решением ДУ (1). Следовательно, общее решение $y_{об}(x)$ линейного однородного ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами (1) представляется в виде

$$y_{об}(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \quad (4)$$

где $C_{1,2}$ — произвольные константы.

Задача 2 (тест). Для каждого линейного однородного ДУ напишите его общее решение $y_{об}(x)$:

$$i) \quad y'' - 5y' + 6y = 0, \quad \text{Ответ:} \quad y_{об}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

$$ii) \quad y'' - 3y' + 2y = 0, \quad \text{Ответ:} \quad y_{об}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

$$iii) \quad y'' - 4y' + 3y = 0; \quad iv) \quad y'' + 6y' + 8y = 0;$$

$$v) \quad y'' + 3y' + 2y = 0; \quad vi) \quad y'' - 5y' + 4y = 0.$$

Указание. Следует найти корни $k_{1,2}$ соответствующих характеристических уравнений (в данной задаче оба корня — не равные друг другу действительные величины), а затем, используя формулу (4), получить выражение для общего решения.

II. Пусть $D = \frac{p^2}{4} - q = 0$, тогда характеристическое уравнение (3) имеет два равных действительных решения $k_1 = k_2 = -\frac{p}{2}$. Очевидно, в качестве $y_1(x)$ можно взять функцию $e^{-px/2}$. В курсе математического анализа показывается, что в этом случае функция $y_2(x) \equiv x e^{-px/2}$ будет линейно независимой от $y_1(x)$ и, кроме того, решением ДУ (1). Поэтому в данном случае

$$y_{об}(x) = C_1 e^{-px/2} + C_2 x e^{-px/2} = (C_1 + C_2 x) e^{-px/2}. \quad (5)$$

Формулу (5) используйте при решении следующей задачи.

Задача 3*. Для каждого линейного однородного ДУ напишите его общее решение.

$$i) \quad y'' - 10y' + 25y = 0, \quad \text{Ответ:} \quad y_{об}(x) = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}.$$

$$ii) \quad y'' + 6y' + 9y = 0, \quad \text{Ответ:} \quad y_{об}(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

$$iii) \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad iv) \quad y'' + 8y' + 16y = 0;$$

$$v) \quad y'' - 2y' + y = 0; \quad vi) \quad y'' - 12y' + 36y = 0.$$

III. Наконец, если $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$, то характеристическое уравнение (3) имеет два комплексных решения $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, где α, β – действительные числа. Тогда можно показать, что $y_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x$. В этом случае

$$y_{об}(x) = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad (6)$$

Используя формулу (6), решите следующую задачу.

Задача 4*. Для каждого линейного однородного ДУ напишите его общее решение.

i) $y'' + 2y' + 5y = 0$, *Ответ:* $y_{об}(x) = C_1 e^{-x} \sin 2x + C_2 e^{-x} \cos 2x$.

ii) $y'' + 9y = 0$, *Ответ:* $y_{об}(x) = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x$.

iii) $y'' + 4y' + 5y = 0$; iv) $y'' + 8y' + 25y = 0$;

v) $y'' - 2y' + 5y = 0$; vi) $y'' - 12y' + 37y = 0$.

► Разберем подробно случай i), для которого, очевидно, характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 2k + 5 = 0$. Его решениями являются числа $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-4} = -1 \pm 2i$, где $\sqrt{-4} = \pm i \cdot 2$, а i – мнимая единица. Следовательно, в рассматриваемом случае $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Используя эти величины в формуле (6), получаем окончательно

$$y_{об}(x) = C_1 e^{-x} \sin 2x + C_2 e^{-x} \cos 2x. \quad \blacktriangleleft$$

Задача 5 (тест). Установите соответствие между ДУ:

i) $y'' - y' - 2y = 0$; ii) $y'' + 16y = 0$; iii) $y'' + 4y' + 4y = 0$;

и их общими решениями:

a) $y_{об}(x) = e^x (C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x)$; b) $y_{об}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$;

c) $y_{об}(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$; d) $y_{об}(x) = C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x$.

Ответ: i) ↔ b); ii) ↔ d); iii) ↔ c).

6.5 Линейные неоднородные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным *неоднородным* ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + py' + q = f(x), \quad (1)$$

где $y \equiv y(x)$ – неизвестная функция от x , p, q – постоянные числа, а $f(x)$ – некоторая известная функция. Чтобы получить общее решение этого уравнения $y_{об}(x)$, нужно,

во-первых, найти какое-нибудь частное его решение $y_q(x)$, и, во-вторых, общее решение $\bar{y}_{об}$ соответствующего однородного ДУ: $y'' + py' + q = 0$. Тогда

$$y_{об}(x) = \bar{y}_{об}(x) + y_q(x). \quad (2)$$

Как строится функция $\bar{y}_{об}(x)$ описано в предыдущем параграфе. Существуют различные методы поиска частного решения неоднородного ДУ (1) (например, метод вариации произвольных постоянных [1, 4] и др.). Однако для некоторых видов функции $f(x)$, стоящей в правой части уравнения (1), поиск частного решения $y_q(x)$ значительно упрощается. Одна из простейших таких возможностей отвечает случаю, когда правая часть уравнения (1) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \quad (3)$$

где $P_n(x)$ — многочлен n -й степени, а α — вещественное число. При этом необходимо различать следующие случаи:

СЛУЧАЙ А). Предположим, что число α из формулы (3) не является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ соответствующего однородного ДУ. В этом случае частное решение можно искать в виде

$$y_q(x) = e^{\alpha x} Q_n(x) \equiv e^{\alpha x} (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n), \quad (4)$$

где $Q_n(x)$ — многочлен той же степени, что и $P_n(x)$ из (3), а $A_0, A_1, \dots, A_n$ — коэффициенты $Q_n(x)$, процедура нахождения которых будет описана ниже.

Задача 1 (тест). По виду правой части неоднородного линейного ДУ напишите наиболее общее выражение, которое соответствует его частному решению $y_q(x)$:

- | | |
|---|---|
| i) $y'' - y' - 6y = e^x x^2$; | Ответ: $y_q(x) = e^x (Ax^2 + Bx + C)$. |
| ii) $y'' - 2y' - 15y = x^3 + 9$; | Ответ: $y_q(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. |
| iii) $y'' - 7y' + 12y = e^{5x} (x^2 + 1)$; | iv) $y'' + 5y' + 6y = e^{2x} (x - 1)$; |
| v) $y'' + y' - 20y = e^{-x}$; | vi) $y'' - 9y' + 20y = e^{-3x} (x^2 + 5)$; |
| vii) $y'' - 3y' - 18y = x + 10$; | viii) $y'' - 3y' - 4y = xe^x$. |

► Разберем задачу vii). Легко видеть, что в правой части этого ДУ стоит функция $f(x) = x + 10 \equiv e^0(x + 10)$, которая имеет вид (3) при $\alpha = 0$ и $n = 1$. Кроме того очевидно, что $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения $k^2 - 3k - 18 = 0$, соответствующего однородного ДУ. Поэтому $y_q(x)$ можно искать в виде $y_q(x) = Ax + B$. Это и есть решение задачи vii). Остальные примеры решаются аналогичным образом. ◀

Для того, чтобы найти численные значения коэффициентов $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ из формулы (4), нужно подставить функцию $y_q(x) = e^{\alpha x} Q_n(x)$ в уравнение (1). В результате после сокращения обеих частей уравнения на несущественный множитель $e^{\alpha x}$ получим равенство

$$Q_n''(x) + (2\alpha + p)Q_n'(x) + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n(x) = P_n(x), \quad (5)$$

в обеих частях которого стоят многочлены n -й степени. Мы рассматриваем (5) как тождество относительно переменной x , то есть равенство, справедливое при всех значениях x .

Это возможно только в случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях x совпадают у обоих многочленов. Таким образом, получается система из $(n+1)$ линейных алгебраических уравнений относительно $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$, решение которой и приведет к точному выражению для $y_q(x)$.

Задача 2*. Найти общее решение следующих неоднородных ДУ:

$$\begin{array}{ll} i) & y'' - y' - 6y = x + 3; \\ ii) & y'' + y' - 6y = x + 9; \\ iii) & y'' + y' + 12y = e^{5x}(x + 5); \quad iv) & y'' - y' + 12y = e^{2x}(x - 1); \\ v) & y'' + y' - 30y = e^{-x}; \quad vi) & y'' - y' - 30y = e^{-3x}(x - 8); \\ vii) & y'' - 3y' - 4y = x^2 e^x; \quad viii) & y'' - 3y' - 4y = (x^2 + 1)e^{-x}. \end{array}$$

► Рассмотрим подробно случай $i)$. Сначала найдем общее решение $\bar{y}_{06}(x)$ соответствующего однородного ДУ, характеристическое уравнение которого, очевидно, имеет вид $k^2 - k - 6 = 0$. У этого квадратного алгебраического уравнения есть два не равных вещественных корня $k_1 = 3, k_2 = -2$. Тогда, как это следует из предыдущего параграфа 6.4, искомая функция есть $\bar{y}_{06}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$.

Нетрудно видеть, что правая часть исходного ДУ есть частный случай функции (3), у которой $\alpha = 0$, а многочлен $P_n(x)$ есть многочлен первого порядка. Так как в нашем случае никакой из корней $k_{1,2}$ характеристического уравнения не совпадает с параметром $\alpha = 0$, то частное решение исходного неоднородного ДУ следует искать в виде $y_q(x) = Ax + B$. Подставляя это выражение в ДУ $i)$ и учитывая при этом, что $y_q''(x) = 0, y_q'(x) = A$, после приведения подобных членов получаем в левой части многочлен первого порядка $(-6A)x + (-A - 6B)$, который должен быть равен многочлену, стоящему в правой части ДУ, то есть мы имеем следующее равенство

$$-6Ax + (-A - 6B) = x + 3.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях этого равенства, получаем систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} -6A = 1, \\ -A - 6B = 3. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $A = -1/6, B = -17/36$, и, следовательно, $y_q(x) = -x/6 - 17/36$. Теперь с учетом формулы (2) для общего решения неоднородного ДУ находим

$$y_{06}(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} - x/6 - 17/36. \quad \blacktriangleleft$$

СЛУЧАЙ В). Пусть характеристическое уравнение имеет разные действительные корни, а параметр α из (3) совпадает с одним из них. Тогда $y_q(x)$ следует искать в виде ⁸

$$y_q(x) = e^{\alpha x} x \cdot Q_n(x) \equiv e^{\alpha x} x \cdot (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n), \quad (6)$$

⁸ В этом случае частное решение $y_q(x)$ нельзя искать в виде (4). Из-за того, что $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$, в левой и правой частях равенства (5) появились полиномы разной степени. Равенство (5) в этом случае нельзя рассматривать как тождество по x , и значит, нельзя составить систему уравнений относительно коэффициентов $A_0, A_1, \dots, A_n$.

где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени n , что и многочлен $P_n(x)$ из формулы (3). Незвестные коэффициенты находятся способом, описанным в разделе **A**).

Задача 3*. Найти общее решение следующих неоднородных ДУ:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & y'' - y' - 2y = e^{-x}(x + 1); \\ \text{ii)} & y'' - 7y' + 10y = e^{2x}; \\ \text{iii)} & y'' + y' - 6y = e^{5x}(x + 5); \\ \text{iv)} & y'' - 6y' + 8y = e^{2x}x; \\ \text{v)} & y'' - 10y' + 21y = 4e^{3x}; \\ \text{vi)} & y'' - 8y' + 12y = e^{6x}(x - 8); \\ \text{vii)} & y'' - y' - 2y = e^{2x}(x^2 + x + 1); \\ \text{viii)} & y'' - 2y' - 15y = e^{-3x}x^2. \end{array}$$

► Рассмотрим подробно решение ДУ viii). Нетрудно видеть, что корнями его характеристического уравнения $k^2 - 2k - 15 = 0$ являются числа $k_1 = -3, k_2 = 5$. Следовательно, общее решение соответствующего однородного ДУ имеет вид

$$y_{06}(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{5x}.$$

Теперь заметим, что в правой части исходного ДУ стоит полином второй степени, помноженный на экспоненту e^{-3x} . У неё в показателе степени стоит коэффициент (-3) , который равен одному из корней характеристического уравнения. В силу этого, частное решение исходного неоднородного ДУ следует искать в виде (6), где многочлен $Q_n(x)$ имеет второй порядок, а $\alpha = -3$, то есть

$$y_{\text{ч}}(x) = e^{-3x} \cdot x \cdot (Ax^2 + Bx + C),$$

где A, B, C – неизвестные коэффициенты. Подставляя это выражение в ДУ viii) и учитывая при этом, что

$$\begin{aligned} y'_{\text{ч}} &= e^{-3x}[-3Ax^3 + x^2(3A - 3B) + x(2B - 3C) + C], \\ y''_{\text{ч}} &= e^{-3x}[9Ax^3 + x^2(9B - 18A) + x(9C - 12B + 6A) - 6C + 2B], \end{aligned}$$

мы получаем после приведения подобных членов и сокращения на несущественный множитель e^{-3x} следующее тождество

$$-24Ax^2 + x(6A - 16B) - 8C + 2B = x^2 \equiv x^2 + 0 \cdot x + 0.$$

Приравнявая в этом соотношении коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем систему уравнений на параметры A, B, C :

$$\begin{cases} -24A = 1, \\ 6A - 16B = 0, \\ -8C + 2B = 0, \end{cases}$$

решение которой $A = -1/24, B = -1/64, C = -1/256$ даёт нам точное выражение для $y_{\text{ч}}(x)$. Теперь, зная $y_{\text{ч}}(x)$ и $\bar{y}_{06}(x)$, получаем окончательно

$$y_{06}(x) = \bar{y}_{06}(x) + y_{\text{ч}}(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{5x} - e^{-3x}x \left(\frac{x^2}{24} + \frac{x}{64} + \frac{1}{256} \right). \blacktriangleleft$$

Задача 4 (тест). Для линейного неоднородного уравнения $y'' + 2y' - 3y = f(x)$ частное решение находят в виде $x(Ax + B)e^x$. Тогда $f(x)$ может иметь вид:

$$i) f(x) = xe^x; \quad ii) f(x) = xe^{-3x}; \quad iii) f(x) = (3x + 1)e^x; \quad iv) f(x) = x^2e^x.$$

СЛУЧАЙ С). Наконец, пусть характеристическое уравнение имеет два одинаковых действительных корня, равных параметру α из (3). Тогда $y_{\text{ч}}(x)$ следует искать в виде

$$y_{\text{ч}}(x) = e^{\alpha x} x^2 \cdot Q_n(x) \equiv e^{\alpha x} x^2 \cdot (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n), \quad (7)$$

где многочлен $Q_n(x)$ с неизвестными коэффициентами $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ имеет ту же степень n , что и многочлен $P_n(x)$ из формулы (3). Процедура нахождения $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ описана в двух предыдущих случаях.

Задача 5*. Найти общее решение следующих неоднородных ДУ:

$$\begin{array}{ll} i) & y'' - 2y' + y = e^x(x + 1); \\ ii) & y'' - 14y' + 49y = e^{7x}; \\ iii) & y'' + 2y' + y = e^{-x}(x + 5); \\ iv) & y'' - 6y' + 9y = e^{3x}x; \\ v) & y'' - 10y' + 25y = 4e^{5x}; \\ vi) & y'' - 8y' + 16y = e^{4x}(x - 8); \\ vii) & y'' - 4y' + 4y = e^{-2x}(x^2 + x + 1); \\ viii) & y'' - 2y' + y = e^x x^2. \end{array}$$

► Рассмотрим подробно решение ДУ $ii)$. Его характеристическое уравнение $k^2 - 14k + 49 = 0$ имеет два одинаковых корня $k_{1,2} = 7$, поэтому общим решением соответствующего однородного ДУ является функция (см. формулу (5) из параграфа 6.3)

$$\bar{y}_{\text{ог}}(x) = (C_1 + C_2 x)e^{7x}.$$

В правой части исходного ДУ стоит полином нулевого порядка, помноженный на экспоненту e^{7x} . У неё в показателе степени стоит коэффициент 7, который совпадает с корнями характеристического уравнения. В силу этого частное решение исходного неоднородного ДУ следует искать в виде (7) с многочленом $Q_n(x)$ нулевого порядка и $\alpha = 7$, то есть $y_{\text{ч}}(x) = e^{7x} x^2 A$, где A – неизвестный коэффициент. Подставляя это выражение в ДУ $ii)$ и учитывая при этом, что

$$\begin{aligned} y'_{\text{ч}} &= Ae^{7x}[7x^2 + 2x], \\ y''_{\text{ч}} &= Ae^{7x}[49x^2 + 28x + 2], \end{aligned}$$

мы получаем после приведения подобных членов и сокращения на несущественный множитель e^{7x} следующее уравнение: $2A = 1$, решение которого $A = 1/2$ даёт нам точное выражение для $y_{\text{ч}}(x)$. Теперь, зная $y_{\text{ч}}(x)$ и $\bar{y}_{\text{ог}}(x)$, получаем окончательно

$$y_{\text{ог}}(x) = \bar{y}_{\text{ог}}(x) + y_{\text{ч}}(x) = (C_1 + C_2 x)e^{7x} + \frac{1}{2}e^{7x}x^2. \quad \blacktriangleleft$$

Описанный в этом параграфе метод нахождения частного решения ДУ (1) в случае, когда его правая часть имеет вид (3), часто называют *методом неопределённых коэффициентов* [6]. С его помощью можно находить частные решения таких ДУ и в случаях с более общими выражениями для правой части $f(x)$ (см., например, [6]), которые однако здесь не рассматриваются.

VII. ЗАДАЧИ НА ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Ниже проводится разбор задач на признаки сходимости (расходимости) числовых рядов, а также рассматриваются некоторые методы их суммирования.

7.1 Необходимый признак сходимости числового ряда

Пусть дан произвольный⁹ числовой ряд (A) : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема. Для того чтобы ряд (A) сходиллся, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$ такое, что при $n > N$ выполнялось неравенство

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon, \text{ для } \forall p \in \mathbb{N}.$$

Следствие 1 (необходимый признак сходимости). Если числовой ряд (A) сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ (последнее условие эквивалентно утверждению $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$).

Следствие 2 (достаточный признак расходимости). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ (или $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$) отличен от нуля или не существует, то числовой ряд (A) расходится.

Замечание. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ (или $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$), то это ещё не значит, что ряд (A) сходится. Однако обратное утверждение справедливо (см. **Следствие 1**).

Задача 1 (тест). Доказать расходимость следующих числовых рядов:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n+1}; & \text{ii)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-2}{n+1}; & \text{iii)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n+1}; & \text{iv)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{n}; \\ \text{v)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n-3}; & \text{vi)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n-9}{2n^3-1}; & \text{vii)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

► Докажем, например, расходимость ряда i). Так как общий член a_n этого ряда имеет вид $a_n = n/(4n+1)$, то нетрудно показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/\left(4 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{4}$. Поэтому, в силу достаточного признака расходимости (Следствие 2), исходный числовой ряд расходится.

Аналогично рассматриваются и другие примеры в **Задаче 1**, для решения которых необходимо уметь вычислять пределы последовательностей. ◀

Задача 2*. Доказать расходимость следующих числовых рядов:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n+1}; & \text{ii)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 5n-2}{n+1}; & \text{iii)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{2n+1}; & \text{iv)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{(-1)^n n}{n+2}; \\ \text{v)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \cdot \sin \frac{1}{n}; & \text{vi)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + (-1)^n n^2 + 3}{n^3 + 1}; & \text{vii)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

⁹ Любой из знакопостоянных или знакопеременных рядов

► Докажем расходимость ряда i). Поскольку $|a_n| = n/(4n+1)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1/4 \neq 0$ (см.

Задача 1-i). Принимая во внимание **Следствие 2**, приходим к выводу о расходимости рассматриваемого ряда. Аналогично решаются остальные примеры. ◀

Задача 3 (тест). Для каких из следующих рядов не выполняется необходимый признак сходимости:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{9n+1}; & \text{ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}; & \text{iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n+1}; \\ \text{iv)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{n}+3\right); & \text{v)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+5}; & \text{vi)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{8n+1}. \end{array}$$

7.2 Достаточные признаки сходимости положительных рядов

Признак ДАЛАМБЕРА. Пусть все члены a_n числового ряда (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны. Кроме того, пусть существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$. Тогда ряд (A) сходится, если $\rho < 1$, и расходится, если $\rho > 1$.

Признак КОШИ (радикальный). Пусть все члены a_n числового ряда (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ неотрицательны. Кроме того, пусть существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$. Тогда ряд (A) сходится, если $\rho < 1$, и расходится, если $\rho > 1$.

Замечание. Если число ρ , фигурирующее в признаках Коши и Даламбера, равно единице, то какой-либо определённый вывод о сходимости или расходимости ряда сделать нельзя, т.е. в этом случае признаки не работают.

Рекомендация. Если общий член a_n числового ряда содержит произведение конечного числа, зависящего от n , множителей (например, произведение типа $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \equiv n!$), то исследование ряда на сходимость удобно проводить с помощью признака Даламбера. Если же a_n отвечает экспоненциальной зависимости от n вида a^n , то обычно используется признак Коши.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$;

► Следуя *Рекомендации*, используем признак Даламбера. Имеем

$$a_n = \frac{n^n}{n!}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \equiv \frac{(n+1)^n(n+1)}{n!(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Вывод: данный ряд расходится. ◀

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

► Здесь удобно использовать признак Коши. Имеем

$$a_n = \frac{1}{3^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2},$$

следовательно,

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Очевидно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится. ◀

Задача 4 (тест). С помощью признака Даламбера исследуйте на сходимость следующие ряды:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}; \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}; \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}; \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 + n}; \quad v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}; \quad vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5^n}.$$

Задача 5*. С помощью признака Даламбера исследуйте на сходимость следующие ряды:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 2^n}; \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \sin \frac{1}{3^n}; \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}; \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n + 3};$$

$$vi) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} \operatorname{arctg} \frac{5}{n}; \quad vii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n (n+1)!}; \quad viii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)}.$$

► В качестве примера исследуем на сходимость ряд vii). Здесь

$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n (n+1)!}.$$

Отметим, что при данном фиксированном значении n числитель этого выражения представляет собой произведение n множителей. Каждый из них получается из одного и того же выражения $(2i-1)$ последовательной подстановкой $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Таким образом, чтобы получить a_{n+1} , нужно в выражении a_n вместо n подставить $(n+1)$. В результате имеем:

$$a_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{3^{n+1} (n+2)!}.$$

Далее видим, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{3^{n+1} (n+2)!} \cdot \frac{3^n (n+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3(n+2)} = \frac{2}{3} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, данный ряд сходится. ◀

Задача 6 (тест). С помощью признака Коши исследуйте на сходимость следующие ряды:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ln^n(n+1)}; \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n; \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}; \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n \frac{2n+1}{n+2}.$$

Задача 7*. С помощью признака Коши исследуйте на сходимость следующие ряды:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)}; \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+5}{5n+2}\right)^{3n+1}; \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n+1}; \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n};$$

$$v) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}; \quad vi) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}; \quad vii) \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^2}; \quad viii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}}.$$

► Предварительно отметим, что при использовании признака Коши полезно иметь в виду следующее утверждение: Пусть $P_k(n)$ — некоторый полином степени k относительно переменной n , то есть $P_k(n) = n^k + a_k n^{k-1} + \dots + a_1$, где $k \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = \overline{1, k}$). Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P_k(n)} = 1$. Теперь разберем подробно решение задачи i). В этом случае, очевидно, имеем

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n(n+1)}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n(n+1)}}.$$

Вышеприведенное утверждение позволяет найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n(n+1)} = 1$, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 2 > 1$. Вывод: ряд i) расходится. ◀

Признак КОШИ (интегральный). Пусть все члены a_n числового ряда (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ неотрицательны, а последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает. Кроме того, пусть при $x \geq k$ существует непрерывная функция $y = f(x)$ такая, что $f(n) = a_n$ (k — произвольное натуральное число). Тогда ряд (A) и несобственный интеграл $\int_k^{\infty} f(x) dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Например, несобственный интеграл $\int_k^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$, следовательно, числовой ряд

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (1)$$

называемый рядом Дирихле, сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$. В дальнейшем мы будем судить о сходимости или расходимости некоторых числовых рядов, сравнивая их с соответствующими рядами Дирихле.

Задача 8 (тест). С помощью интегрального признака Коши исследуйте на сходимость следующие ряды:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}; \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}; \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + 1)^2}; \quad iv) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n};$$

$$v) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}; \quad vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n}}; \quad vii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; \quad viii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 6}.$$

Задача 9*. С помощью интегрального признака Коши исследуйте на сходимость следующие ряды:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+3}}; \quad \text{ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n}; \quad \text{iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n^2}{2}}; \quad \text{iv)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}; \\ \text{v)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} 2^{-\sqrt{n}}; \quad \text{vi)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}; \quad \text{vii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}; \quad \text{viii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}; \\ \text{ix)} \quad & \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \ln^2(n-2)}; \quad \text{x)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{(n^2+1)}; \quad \text{xi)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$

► Разберем решение задачи vi). Пусть $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$; заметим, что эта функция при $x = n$ совпадает с общим членом ряда vi). Следуя интегральному признаку Коши, достаточно исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx$. Предположим, что $p \neq 1$. Тогда имеем

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln^p x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\ln^{-p+1} x}{-p+1} \Big|_{x=2}^{x=b} = \begin{cases} \frac{\ln^{-p+1} 2}{p-1}, & \text{при } p > 1; \\ \infty, & \text{при } p < 1. \end{cases}$$

Таким образом, мы доказали, что несобственный интеграл сходится при $p > 1$ и расходится при $p < 1$. Докажите самостоятельно, что при $p = 1$ несобственный интеграл $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx$ также расходится. Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Замечание. Аналогичным образом, используя интегральный признак, можно доказать, что числовой ряд

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(\alpha n + \beta) \ln^p(\alpha n + \beta)}, \quad (2)$$

(здесь k — натуральное число, а вещественные числа $\alpha > 0$ и β такие, что $\alpha k + \beta > 1$) сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. ◀

Признак сравнения. Пусть все члены a_n числового ряда (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, и b_n числового ряда (B): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, неотрицательны и, начиная с некоторого номера n_0 , удовлетворяют неравенству $a_n \leq b_n$. Тогда если ряд (B) сходится, то и ряд (A) также сходится. Если ряд (A) расходится, то расходится и ряд (B).

Замечание. В качестве эталонных рядов, о сходимости которых всё известно, в признаке сравнения можно использовать ряды (1) и (2) с $\forall k \in \mathbb{N}$, а также ряд бесконечной геометрической прогрессии $\sum_{n=k}^{\infty} q^n$.

Пример. Используя признак сравнения, доказать расходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

► Воспользуемся неравенством $\ln x < x$, где $x > 0$, которое становится очевидным из сравнения графиков функций $y = \ln x$ и $y = x$. Отсюда, в частности, следует, что для всех

натуральных $n \geq 2$ справедливо соотношение $\ln n < n$, а, следовательно, и неравенство $1/n < 1/\ln n$. Так как ряд $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n$ расходится (это так называемый *гармонический* ряд, который является частным случаем ряда Дирихле (1) при $k = 2$ и $p = 1$), то исходный ряд, согласно признаку сравнения, также расходится. ◀

Задача 10 (тест). С помощью признака сравнения исследуйте на сходимость следующие ряды:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}; \quad \text{ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 3}; \quad \text{iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \ln n}; \quad \text{iv)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n} - \sin^2 n}; \\ \text{v)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}; \quad \text{vi)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5 + \cos^2 n}; \quad \text{vii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}; \quad \text{viii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^3}. \end{aligned}$$

► Ограничимся исследованием ряда v). *Первый способ.* Нетрудно видеть, что $n^n \geq n^2$ для всех значений $n \geq 1$, следовательно, $1/n^2 \geq 1/n^n$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ сходится (это ряд Дирихле (1) при $p = 2$ и $k = 1$), то по признаку сравнения сходится и исходный ряд. *Второй способ.* Можно воспользоваться и другим очевидным неравенством, $1/n^n \leq 1/2^n$, которое справедливо при $n \geq 2$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ является сходящимся, так как он составлен из членов бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/2$, следовательно, сходится и ряд v). ◀

Задача 11*. С помощью признака сравнения, а также других сформулированных ранее признаков, исследуйте на сходимость следующие ряды:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}, p > 1; \quad \text{ii)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 1) \ln n}; \quad \text{iii)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 1) \ln n}; \quad \text{iv)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 \ln^2 n}; \\ \text{v)} \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2} + n \ln^2 n}; \quad \text{vi)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n + 1)}; \quad \text{vii)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n - 1) \ln n}; \quad \text{viii)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^5 \ln^3 n}; \\ \text{ix)} \quad & \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n - 2) \ln(n - 3)}; \quad \text{x)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n + 3) \ln^2(n + 1)}; \quad \text{xi)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n + 1) \ln^3(n\sqrt{5} + 1)}; \\ \text{xii)} \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n - 1)}}; \quad \text{xiii)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n + 3) \ln^2(n + 1)}; \quad \text{xiv)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3 + 1) \ln n}. \end{aligned}$$

► Исследуем на сходимость ряд i). Очевидно, что при $n \geq 3$ выполняется неравенство $\ln n > 1$, следовательно, справедливо соотношение $\frac{1}{n^p \ln n} < \frac{1}{n^p}$. Отсюда, с учетом сходимости ряда Дирихле (1) при $p > 1$, следует сходимость исходного ряда (согласно признаку сравнения).

Аналогичным образом можно исследовать ряды ii), iv) и viii). При исследовании ряда iii) можно использовать неравенство $n^2 - 1 = \frac{n^2}{2} + \left(\frac{n^2}{2} - 1\right) > \frac{n^2}{2}$, которое справедливо при всех $n \geq 2$, а потом принять во внимание сходимость рядов i).

Ряды vi), vii), ix)–xiv) с помощью признака сравнения сводятся к рядам типа (2) или похожим на них, и которые затем можно исследовать с помощью интегрального признака Коши. ◀

Задача 12*. С помощью признака сравнения, а также других ранее сформулированных признаков, исследуйте на сходимость следующие ряды:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}; & \text{ii)} \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n + 1}; & \text{iii)} \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5 + n}}; & \text{iv)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^3 n}{n^3}; \\ \text{v)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2 + 2}; & \text{vi)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \cos n}{\sqrt[4]{n^3}}; & \text{vii)} \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 - \sin n}{\sqrt{n^2 - n}}; & \text{viii)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \sin n}{n - \ln n}; \\ \text{ix)} \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n + \sin^2 n}; & \text{x)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 2}}{n^2(2 + \cos n)}; & \text{xi)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + \cos \pi n) \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7 + 5}}. \end{aligned}$$

Рекомендация. При решении этих задач полезно воспользоваться неравенствами: $\ln n < n$; $-1 \leq \sin n \leq 1$, $-1 \leq \cos n \leq 1$; $\operatorname{arctg} n < \pi/2$.

Предельный признак сравнения. Пусть все члены a_n числового ряда (A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, и b_n числового ряда (B): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, положительны и существует конечный отличный от нуля предел (*): $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = L$, где $0 < L < \infty$. Тогда ряды (A) и (B) сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. Полная формулировка данной теоремы часто включает еще два пункта.

(1) Если $L = 0$ и ряд (B) сходится, то сходится и ряд (A); (2) если $L = \infty$ и ряд (A) расходится, то расходится и ряд (B).

Процедура построения эталонного ряда. Пусть исследуется на сходимость ряд (A), а эталонный ряд (B) — это ряд, о сходимости которого все известно и с которым ряд (A) сравнивается в предельном признаке сравнения. Согласно этому признаку ряд (A) обладает теми же свойствами сходимости, как и эталонный ряд (B), если выполнено условие (*).

Опишем процедуру нахождения эталонного ряда. Мысленно разобьём аналитическое выражение для a_n , которое есть функция от n , на несколько составных частей. Пусть какая-то из этих частей представляет собой сумму некоторых величин. Тогда оставляем в ней только то слагаемое, которое даёт основной вклад в сумму, т.е. слагаемое, которое много больше других слагаемых при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, мы получим величину $\widetilde{a}_n$, имеющую тот же порядок роста (малости), что и величина a_n . Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{a}_n$ можно использовать в качестве эталонного ряда (B) в предельном признаке сравнения, если без труда можно определить его сходимость или расходимость. Следовательно, задача решена. Если же нет, то описанную процедуру следует повторить, т.е. нужно рассмотреть другую составную часть величины a_n и попытаться уже в ней оставить лидирующее слагаемое при $n \rightarrow \infty$ и т.д. Далее, очень часто бывает, что некоторые из составных частей a_n при $n \rightarrow \infty$ являются бесконечно малыми величинами, приведенными в таблице простейших асимптотических формул главы I, параграфа 1.1. Тогда их следует заменить на эквивалентные бесконечно малые. Например, $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ при $n \rightarrow \infty$. Если полученная при этом величина $\widetilde{a}_n$ достаточно проста, то соответствующий ряд можно использовать в качестве эталонного. Наконец,

последнее замечание: выделение лидирующих вкладов во всех составных частях исходной a_n можно проводить одновременно.

Вывод: (1). Эталонный ряд (В) для предельного признака сравнения можно построить из последовательности с общим членом $\widetilde{a}_n$, который найден по вышеизложенной схеме и имеет тот же порядок роста (малости), что и величина a_n ; (2). При этом соотношение (*) (см. формулировку признака) выполняется автоматически, и в конкретных примерах его проверять не обязательно.

Пример 1. С помощью предельного признака сравнения исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{3n^3 - n + 4}.$$

► В числителе общего члена этого ряда при $n \rightarrow \infty$ можно пренебречь единицей по сравнению с n^2 , а в знаменателе в этом пределе можно оставить только первое слагаемое. В результате имеем:

$$a_n \equiv \frac{n^2 + 1}{3n^3 - n + 4} \sim \frac{n^2}{3n^3} = \frac{1}{3n} \equiv b_n.$$

Так как эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится (он пропорционален расходящемуся гармоническому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$), то расходится и исходный ряд. ◀

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1) \sin \frac{n - 1}{n^5 - n^3 + 10}.$$

► Устремив мысленно n к бесконечности, мы видим, что аргумент синуса является отношением двух бесконечно больших величин, в которых лидирующие вклады вносят соответственно член n в выражении, стоящем в числителе, и n^5 — в выражении знаменателя. В результате, аргумент синуса — б.малая, эквивалентная величине $1/n^4$. Заменяя затем синус на эквивалентную бесконечно малую и выделяя в сомножителе, стоящем перед синусом, главный вклад, мы получим следующее выражение для общего члена эталонного числового ряда b_n :

$$a_n \equiv (n^2 - 1) \sin \frac{n - 1}{n^5 - n^3 + 10} \rightarrow \widetilde{a}_n = n^2 \sin \frac{n}{n^5} = n^2 \sin \frac{1}{n^4} \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} \equiv b_n.$$

Так как построенный эталонный ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$, где $b_n = \frac{1}{n^2}$, является сходящимся (см. ряд Дирихле (1) при $p = 2$ и $k = 2$), то исходный ряд также сходится. ◀

Задача 13 (тест). Дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 1) \arcsin \frac{1}{n^4 + n + 1}.$$

Указать какие ряды можно использовать в качестве эталонных, если исследовать данный ряд с помощью предельного признака сравнения:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + n}; \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arcsin \frac{1}{n^4}; \quad iii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\ln n^2}; \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

► Суть задачи состоит в том, чтобы указать те из рядов i)–iv), у которых общий член ряда или эквивалентен, или с точностью до некоторого числового множителя совпадает с общим членом исходного ряда

$$a_n = (n^2 + 1) \arcsin \frac{1}{n^4 + n + 1}.$$

Первый способ. Мы уже описали процедуру построения выражений, эквивалентных a_n . В согласии с ней, при $n \rightarrow \infty$ у множителя перед арксинусом следует оставить лидирующий член — слагаемое n^2 , а в знаменателе аргумента арксинуса —

слагаемое n^4 . В результате, получим выражение, эквивалентное a_n , то есть

$\widetilde{a}_n = n^2 \arcsin \frac{1}{n^4}$. Это значит, что исходный ряд можно сравнивать с эталонным

рядом ii). Далее, если воспользоваться тем, что $\arcsin \frac{1}{n^4} \sim \frac{1}{n^4}$ при $n \rightarrow \infty$, то видно, что роль эталонного ряда может также играть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n = \frac{1}{n^2}$. Таким образом, исходный ряд можно сравнивать и с рядом iv).

Второй способ. Заметим, что ряды i), ii), iv) сходятся, тогда как ряд iii) -- расходится. Рассмотрим предел отношения a_n/b_n при $n \rightarrow \infty$, где b_n — общий член какого-либо из рядов i)–iv). Можно показать, что этот предел есть конечное число, отличное от нуля, только в случаях ii) и iv). Для случая i), он равен бесконечности, а в случае iii), предел равен нулю, то есть не выполняются условия полной формулировки предельного признака сравнения.

Ответ: в качестве эталонных рядов для сравнения с исходным рядом можно использовать ряды ii) и iv). ◀

Задача 14*. Дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^3 - n + 10) \operatorname{arctg} \frac{1}{n^5 + 1}.$$

Указать какие из ниже перечисленных рядов можно использовать в качестве эталонных, если исследовать данный ряд с помощью предельного признака сравнения:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}; \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{n^5}; \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sin \frac{1}{n}}; \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad v) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2};$$

Ответ: ii), iv), v).

Задача 15 (тест). С помощью предельного признака сравнения исследуйте на сходимость следующие ряды:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}; \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 5n + 10}; \quad iii) \sum_{n=2}^{\infty} \sin \frac{1}{n^3}; \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)+1}.$$

► Исследуем ряд i). Известно, что при $n \rightarrow \infty$ величина 2^n много больше, чем n . В силу этого, общий член $a_n = \frac{1}{(2^n - n)}$ этого ряда эквивалентен величине $b_n = \frac{1}{2^n}$.

Так как соответствующий ряд с общим членом b_n сходится (это сходящаяся геометрическая прогрессия), то этой информации достаточно для вывода о сходимости исходного ряда i). ◀

Задача 16*. С помощью предельного признака сравнения исследуйте на сходимость следующие ряды:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n + 10}{\sqrt{n^7 + 2}}; \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right); \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right); \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{n^4};$$

$$v) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right); \quad vi) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right); \quad vii) \sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin \frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

► Исследуем ряд $ii)$. Выражение в его круглых скобках является бесконечно малой величиной, причём $\left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \sim \frac{1}{n}$ при $n \rightarrow \infty$. Используя это соотношение, нетрудно видеть, что при $n \rightarrow \infty$

$$a_n \equiv \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \sim \frac{1}{n^2} \equiv b_n.$$

Так как ряд с общим членом b_n сходится (см. ряд Дирихле (1) при $p = 2$ и $k = 1$) и является эталонным¹⁰ для ряда $ii)$, то ряд $ii)$ также сходится согласно предельному признаку сравнения. Аналогичным образом исследуются большинство рядов из этой задачи. ◀

Задача 17*. С помощью предельного признака сравнения исследуйте на сходимость следующие ряды:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 6}{n^2 + 5}; \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}-1}{n^2}} - 1 \right); \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right); \quad iv) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 3}{n^2 - n};$$

$$v) \sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}; \quad vi) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n^3+5}{n^3+4} \right)^7 - 1 \right]; \quad vii) \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{\sqrt{(n^2+3)^5}};$$

$$viii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(\sqrt[3]{n}-1)(n^4\sqrt[4]{n^3}-1)}; \quad ix) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad x) \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{n^2+1}{n^2-n} \right)^{11} - 1 \right].$$

► Исследуем ряд $i)$. Нетрудно видеть, что при $n \rightarrow \infty$ общий член a_n этого ряда является бесконечно малой величиной. Чтобы упростить его вид, воспользуемся следующим тождественным преобразованием:

$$a_n = \ln \frac{n^2 + 6}{n^2 + 5} = \ln \left(1 + \frac{1}{n^2 + 5} \right).$$

Так как дробь $1/(n^2 + 5)$ является бесконечно малой, можно воспользоваться известным соотношением $\ln(1+x) \sim x$ при $x \rightarrow 0$. В результате имеем:

$$a_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n^2 + 5} \right) \sim \frac{1}{n^2 + 5} \sim \frac{1}{n^2} \equiv b_n.$$

Так как ряд с таким общим членом b_n сходится (см. ряд Дирихле (1) при $p = 2$ и $k = 1$) и является эталонным для исходного ряда $i)$, то ряд $i)$ также сходится согласно предельному признаку сравнения. Аналогичным образом исследуется ряд $iv)$.

¹⁰ Нетрудно видеть, что величина b_n построена по вышеизложенной процедуре построения эталонного ряда

Для исследования рядов vi) и x) их общий член следует привести к виду, в котором можно воспользоваться соотношением $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ при $x \rightarrow 0$. ◀

Задача 18*. Используя различные признаки, исследуйте на сходимость следующие ряды:

$$\begin{aligned} i) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 1}{5 \cdot 3^n + 2}; \quad ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}; \quad iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}); \quad iv) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}; \\ v) \quad & \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln \ln n}; \quad vi) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}; \quad vii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n^6 + n + 2}}{n^4 + 1}; \quad viii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 4}{7^{n+1} + 1}. \end{aligned}$$

Задача 19 (тест). При каких положительных значениях параметра α сходятся ряды:

$$i) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha n + 1}{5n + 2}\right)^n; \quad ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha n + 3}{7n - 2}\right)^n; \quad iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n + 1}{\alpha n + 2}\right)^n; \quad iv) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n - 5}{\alpha n + 3}\right)^n.$$

► Исследуем ряд i). Пусть a_n — общий член этого ряда. Тогда очевидно, что

$$\sqrt[n]{a_n} \equiv \frac{\alpha n + 1}{5n + 2} \rightarrow \frac{\alpha}{5} \equiv \rho \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Согласно предельному радикальному признаку Коши, ряд i) сходится при $\rho < 1$, т.е. при $0 < \alpha < 5$, и расходится при $\rho > 1$, т.е. при $\alpha > 5$. При $\alpha = 5$ этот ряд будет расходиться, т.к. в этом случае

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{5n + 2}\right)^n = e^{-1/5} \neq 0,$$

следовательно, выполняется достаточный признак расходимости числовых рядов.

Аналогичным образом исследуются и остальные ряды ii)–iv). ◀

7.3 Некоторые методы суммирования числовых рядов

Суммы некоторых простых рядов можно находить, непосредственно используя определение суммы бесконечного ряда.

Определение 1. Пусть задан ряд (A) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, тогда сумма его первых n членов, $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$, называется n -й частичной суммой ряда (A).

Замечание. Каждая последующая частичная сумма получается из предыдущей добавлением очередного члена ряда (A).

Определение 2. Ряд (A) сходится, если существует конечный предел

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

тогда конечное число S называется суммой ряда (A) .¹¹ Если этот предел не существует или равен $\pm\infty$, то ряд (A) расходится и суммы (по Коши) не имеет.

При решении задач часто используются следующие свойства рядов [4]:

1. Отбрасывание конечного числа членов ряда (или добавление к ряду конечного числа членов) не влияет на сходимость или расходимость этого ряда.
2. Пусть дан сходящийся ряд $(A) \sum a_n$, суммы которого равна A , и вещественное число $\lambda \neq 0$; тогда ряд $\sum \lambda a_n$ сходится, причем его сумма равна λA .
3. Пусть даны сходящиеся ряды $(A) \sum a_n$ и $(B) \sum b_n$, суммы которых равны соответственно A и B ; тогда ряд $\sum (a_n \pm b_n)$ сходится, причем его сумма равна $A \pm B$.

Пример 1. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} \right)$, найти его сумму.

► Построим несколько первых частичных сумм:

$$s_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; \quad s_2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}; \quad s_3 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}; \quad \dots$$

Очевидно, что $s_k = 1 - \frac{1}{k+1}$, тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 1$, и следовательно, исходный ряд сходится, а его сумма равна единице. ◀

Пример 2. Пусть дана бесконечная геометрическая прогрессия

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \equiv b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1} + \dots \quad (1)$$

со знаменателем q и первым членом b_1 , т.е. ее общий член имеет вид $b_n = b_1 q^{n-1}$. Найти сумму этого ряда, если она существует.

► Рассмотрим следующую сумму конечного числа слагаемых

$$s_n/b_1 \equiv x = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}.$$

Добавив q^n к обеим частям данного равенства и выполнив элементарные преобразования, получим, что

$$x + q^n = 1 + q(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}) = 1 + q \cdot x.$$

Таким образом,

$$x = \frac{1 - q^n}{1 - q} \equiv \frac{s_n}{b_1}.$$

Следовательно, n -ая частичная сумма ряда геометрической прогрессии s_n представима в виде $s_n = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$. Если $|q| < 1$, то предел частичных сумм s_n при $n \rightarrow \infty$ существует и равен $S = b_1/(1 - q)$. Вывод: ряд геометрической прогрессии сходится для каждого $|q| < 1$, и он не имеет суммы для любого $|q| > 1$ (см. **Определение 2**). ◀

Пример 3. Пусть дан ряд $b_1 - b_1 + b_1 - b_1 + \dots$, который является частным случаем геометрической прогрессии (см. **Пример 2**) при $q = -1$. Найти его сумму, если она существует.

► Очевидно, что такой ряд расходится, так как предел его частичных сумм

¹¹ Такая сумма часто называется суммой бесконечного ряда по Коши

$$s_n = \begin{cases} b_1, & \text{если число членов нечетно,} \\ 0, & \text{если число членов четно} \end{cases}$$

не существует. Следовательно, он не суммируем по Коши (см. **Определение 2**). ◀

По аналогии можно доказать, что ряд $b_1 + b_1 + b_1 + b_1 + \dots$, также являющийся частным случаем геометрической прогрессии, но уже при $q = 1$, не имеет суммы, т.е. расходится. Следовательно, бесконечная геометрическая прогрессия имеет сумму, равную $S = b_1/(1 - q)$, только при $|q| < 1$. При остальных значениях q этот ряд расходится.

Задача 1 (тест). Найти суммы следующих рядов:

$$i) \sum_{n=3}^{\infty} 7 \left(\frac{2}{3}\right)^n; \quad ii) \sum_{n=4}^{\infty} 3 \left(-\frac{1}{4}\right)^n; \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n; \quad iv) \sum_{n=2}^{\infty} 5 \left(\frac{-5}{6}\right)^n.$$

► Рассмотрим случай $i)$. Каждый член этого ряда получается из предыдущего умножением на одно и то же число q (в данном случае $q=2/3$). Следовательно, как и в других случаях **Задачи 1**, перед нами бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем $q=2/3$. Для того, чтобы найти первый член b_1 геометрической прогрессии $i)$, достаточно взять из бесконечной суммы $i)$ член с наименьшим номером, т.е. с номером $n=3$. Тогда получаем $b_1 = 7 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 56/27$. В конечном счете для геометрической прогрессии $i)$ получается следующая сумма S :

$$S = \frac{b_1}{1 - q} = \frac{56}{27(1 - \frac{2}{3})} = \frac{56}{9}.$$

Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом. ◀

При нахождении сумм некоторых числовых рядов бывает полезным следующее утверждение.

Утверждение I. Пусть дан сходящийся ряд $(A) \sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Тогда если

$$a_i = u_i - u_{i+p}, \quad \text{где } \forall p \in \mathbb{N}, \quad \text{причем } \lim_{i \rightarrow \infty} u_i = b,$$

то сумма ряда (A) равна

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^p u_i - b \cdot p.$$

Хорошей иллюстрацией этого утверждения является ряд из **Примера 1**. Действительно, общий член этого ряда имеет структуру, требуемую **Утверждением I**. При этом $u_i = \frac{1}{i}$, и $b=0$. В результате, с помощью **Утверждения I** можно получить то же значение для суммы, что и методом непосредственного вычисления предела частичных сумм ряда, использованном в **Примере 1**. Далее рассмотрены более сложные примеры и задачи по нахождению сумм числовых рядов с помощью **Утверждения I**.

Пример 4. Пусть дан ряд (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с общим членом вида

$$a_n = \frac{n}{n+0.5} - \frac{n+5}{n+5.5}.$$

Найти сумму этого ряда.

► Общий член этого ряда нетрудно преобразовать к виду

$$a_n = \frac{-2,5}{(n+0,5)(n+5,5)}.$$

Отсюда, используя, например, предельный признак сравнения сходимости числовых рядов (см. предыдущий параграф), делаем вывод, что ряд (A) сходится. Далее полагаем $u_n = \frac{n}{n+0.5}$, т.е. $a_n = u_n - u_{n+5}$. Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+0.5} = 1$, поэтому для исходного ряда (A) все условия **Утверждения I** выполнены (причем $p=5$ и $b=1$). Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+0.5} - \frac{n+5}{n+5+0.5} \right) = \sum_{n=1}^5 \frac{n}{n+0.5} - 5 \cdot 1 = \frac{14282}{3465} - 5 = -\frac{3043}{3465}. \quad \square \quad \square$$

◀

Задача 2 (тест). Найти суммы рядов, где $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, но $\alpha \neq -1, -2, -3, \dots$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right); \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4} \right); \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+7} \right); \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right);$$

$$v) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n+1+\alpha} \right); \quad vi) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right); \quad vii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+\alpha} - \frac{n+7}{n+7+\alpha} \right).$$

► Рассмотрим случай *i*). Чтобы использовать **Утверждение I**, заметим, что общий член a_n ряда *i*) представим в виде $a_n = u_n - u_{n+1}$, где $u_n = \frac{1}{n+1}$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. В силу этого очевидно, что параметры p и b , присутствующие в **Утверждении I**, имеют вид $p=1$, $b=0$. Теперь, используя **Утверждение I**, находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \sum_{n=1}^1 \frac{1}{n+1} - 1 \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

Остальные примеры решаются аналогичным образом. ◀

Пример 5. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

► Разложим правильную рациональную дробь на сумму простых дробей:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1},$$

где A и B — неопределенные коэффициенты. Легко найти, что $A = -B = 1$. В этом случае условия **Утверждения I** выполнены, так как $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. ◀

Задача 3*. Найти суммы рядов, где $\alpha \in \mathbb{R}$, но $\alpha \neq -1, -2, -3, \dots$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}; \quad ii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)}; \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}; \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)(n+1+\alpha)};$$

$$v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}; \quad vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}; \quad vii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)};$$

► Суммирование рядов i)-iv) проводится методом, использованным в **Примере 5**. Решая v) и vi), можно использовать следующий методический прием. Числитель общего члена каждого из этих рядов давайте запишем в виде линейной комбинации наименьшего и наибольшего множителей, стоящих в знаменателе, например,

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{\alpha(n+1) + \beta(n+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \alpha \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \beta \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

где $\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0, \\ \alpha + \beta = 1. \end{cases}$ То есть $\alpha = 3/2$, $\beta = -1/2$. Как результат, ряд v) может быть представлен в виде суммы двух рядов типа i)-iv). Аналогично, если числитель общего члена ряда vii) представить в виде уже квадратичной комбинации из наименьшего и наибольшего множителей, стоящих в знаменателе, т.е. $n^2 = (n+1)(n+4) + \alpha(n+1) + \beta(n+4)$, где $\alpha = -16/3$, $\beta = 1/3$, то нахождение суммы ряда vii) сведется к суммированию рядов типа i)-vi). ◀

VIII. ЗАДАЧИ НА СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

8.1 Представление неявной функции с помощью степенного ряда

Пусть функция двух переменных $F(x, y)$ определена в некоторой области D двумерного евклидова пространства. Равенство

$$F(x, y) = 0, \quad (1)$$

рассматриваемое как уравнение относительно функции $y(x)$, называется *функциональным уравнением*. Сама же функция $y(x)$, являющаяся решением уравнения (1), обычно называется функцией, заданной неявно с помощью уравнения (1) (см. параграф 2.3). Как правило, для решений функциональных уравнений, т.е. для неявно заданных функций, точных аналитических выражений не существует. В силу этого полезна следующая теорема о существовании и единственности неявной функции (см., например, Краснов и др. [3], стр. 125):

Теорема. Пусть 1) функция $F(x, y)$ дифференцируема в некоторой окрестности D точки $M_0(x_0, y_0)$; 2) $F(x_0, y_0) = 0$; 3) частные производные $\partial F(x, y)/\partial x$ и $\partial F(x, y)/\partial y$ существуют и непрерывны в D ; 4) в точке $M_0(x_0, y_0)$ частная производная $\partial F(x, y)/\partial y$ отлична от нуля, т.е. $\partial F(x_0, y_0)/\partial y \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 существует единственная непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$ такая, что (i) $y_0 = y(x_0)$; (ii) $F(x, y(x)) \equiv 0$; (iii) $y'(x) = -F'_x(x, y(x))/F'_y(x, y(x))$.

Так как совокупность точек плоскости, удовлетворяющих уравнению $F(x, y) = 0$, представляет собой некоторую кривую линию L , то геометрически вышеприведенную **Теорему** можно интерпретировать следующим образом. Пусть $M_0(x_0, y_0) \in L$ и условия **Теоремы** выполнены. Это, в частности, означает, что касательная к L в точке M_0 имеет отличный от $\pm\infty$ угловой коэффициент (в силу того, что $\partial F(x_0, y_0)/\partial y \neq 0$), т.е. она не является вертикальной линией. Тогда, как утверждает **Теорема**, существует такая ε -окрестность точки M_0 , что часть линии L , лежащая внутри этой окрестности, пересекается любой вертикальной прямой не более чем в одной точке. (В этом случае вся эта часть кривой L является графиком некоторой функции $y = y(x)$, который проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$.)

Выше уже было отмечено, что в общем случае, как правило, неявную функцию нельзя представить в явном аналитическом виде. Однако существуют различные методы, позволяющие с достаточной степенью точности находить приближенные значения функции $y(x)$, неявно заданной уравнением (1). Один из таких методов — представление этой функции в виде степенного ряда Тейлора.

Постановка задачи. Пусть дано функциональное уравнение (1), которое задает неявную функцию (одну или несколько). Предположим, что каким-либо образом нам удалось найти точку (x_0, y_0) , удовлетворяющую этому уравнению, т.е. $F(x_0, y_0) = 0$. Кроме того, будем предполагать, что другие условия вышеприведенной **Теоремы** также выполнены, т.е. $\partial F(x_0, y_0)/\partial y \neq 0$ и т.д. В этом случае существует единственная неявная функция $y = y(x)$, удовлетворяющая (начальному) условию $y(x_0) = y_0$. Требуется представить эту неявную функцию $y(x)$ в окрестности точки $x = x_0$ в виде ряда Тейлора ¹²:

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \frac{a_2}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{a_3}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \quad (2)$$

где коэффициенты ряда a_k ($k = \overline{0, \infty}$) имеют вид:

$$a_0 = y(x_0), \quad a_1 = y'(x_0), \quad a_2 = y''(x_0), \quad a_3 = y'''(x_0), \quad \dots \quad (3)$$

(Конечно, мы предполагаем, что в некоторой окрестности точки x_0 функция $F(x, y)$ бесконечно раз дифференцируема.) Изложим метод нахождения коэффициентов a_k этого ряда Тейлора.

Решение задачи. Для нахождения коэффициентов a_k , необходимо вычислить значения производных первого, второго и т.д. порядков неявно заданной функции $y(x)$ в точке x_0 , а также учесть, что $a_0 = y(x_0) = y_0$.

Полагая, что в уравнении (1) $y = y(x)$, мы превращаем его в тождество относительно переменной x из некоторой окрестности точки x_0 ,

$$F(x, y(x)) \equiv 0, \quad (4)$$

дифференцируя которое, имеем

$$F'_x(x, y(x)) + F'_y(x, y(x)) \cdot y'(x) \equiv 0. \quad (5)$$

Полагая в этом тождестве $x = x_0$ и учитывая, что $y(x_0) = y_0$, находим:

¹² Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора функции $f(x)$ часто называется рядом Маклорена. Несмотря на это, всюду в пособии используется только первое из названий.

$$a_1 = y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \quad (6)$$

Далее, для нахождения $y''(x_0)$ дифференцируем соотношение (5):

$$F''_{xx}(x, y(x)) + 2y'(x)F''_{xy}(x, y(x)) + (y'(x))^2 F''_{yy}(x, y(x)) + y''(x)F'_y(x, y(x)) \equiv 0. \quad (7)$$

Как и до этого, подставим в тождество (7) значения x_0 и $y(x_0)$, а также $y'(x_0)$, вычисленное с помощью (6). Далее, решая полученное равенство относительно $y''(x_0)$, найдем:

$$a_2 = y''(x_0) = -\frac{F''_{xx}(x_0, y_0) + 2y'(x_0)F''_{xy}(x_0, y_0) + (a_1)^2 F''_{yy}(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \quad (8)$$

Чтобы определить коэффициент a_3 нужно продифференцировать тождество (7) и т.д. Продемонстрируем на конкретных примерах как работает вышеизложенная схема.

Задача 1 (Сложная). Пусть дано уравнение $F(x, y) \equiv \sin xy - x^2 + y^2 - 25 = 0$ (*).

Сначала найдем какую-нибудь точку (x_0, y_0) , удовлетворяющую уравнению (*); затем проверим, что в этой точке выполнены все условия **Теоремы**, и, значит, существует единственная (неявная) функция $y = y(x)$, которая удовлетворяет уравнению (*) и начальному условию $y(x_0) = y_0$; наконец, следует найти первые три члена разложения $y = y(x)$ в степенной ряд Тейлора (2) в некоторой окрестности точки $x = x_0$.

► Нетрудно видеть, что, например, точка $(x_0 = 0, y_0 = 5)$ удовлетворяет уравнению (*). Так как в нашем случае $\partial F / \partial y = x \cos xy + 2y \neq 0$ при $x = 0, y = 5$, то на основании вышеприведенной теоремы можно сделать вывод о существовании единственной неявной функции $y = y(x)$, заданной с помощью уравнения (*), которая удовлетворяет (начальному) условию $y(0) = 5$ и превращает исходное уравнение (*) в тождество. Представим теперь неявную функцию $y = y(x)$ в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$ в виде следующего степенного ряда

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2!} x^2 + \frac{a_3}{3!} x^3 + \dots \quad (**)$$

у которого

$$a_0 = y(0), \quad a_1 = y'(0), \quad a_2 = y''(0), \quad a_3 = y'''(0), \quad \dots$$

Так как по условию $y(0) = 5$, то имеем $a_0 = 5$. Продифференцируем уравнение (*):

$$\cos xy(x) \cdot [y(x) + xy'(x)] - 2x + 2y(x) \cdot y'(x) \equiv 0. \quad (***)$$

Решая уравнение (***) относительно $y'(x)$, получаем, что $a_1 = y'(0) = -1/2$, если $x_0 = 0$ и $y(0) = 5$. Дифференцируя далее уже соотношение (***), получим:

$$-\sin xy(x)[y(x) + xy'(x)]^2 + \cos xy(x)[2y'(x) + xy''(x)] - 2 + 2(y'(x))^2 + 2y(x) \cdot y''(x) \equiv 0.$$

Полагаем в этом уравнении $x = 0$ и учитываем, что $y(0) = 5$, $a_1 = y'(0) = -1/2$ и $y''(0) = a_2$, затем разрешаем его относительно a_2 и находим, что $a_2 = 3/20$. Найденные значения коэффициентов a_0, a_1, a_2 подставляем в (**). В результате для неявной функции $y(x)$ получается следующее представление в виде степенного ряда в некоторой окрестности точки $x = 0$:

$$y(x) = 5 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{40}x^2 + \dots \quad \blacktriangleleft$$

Задача 2 (Простая). Пусть дано уравнение $F(x, y) \equiv xy^2 + x^3 - y + 3 = 0$ (*).

Требуется найти какую-нибудь точку (x_0, y_0) , удовлетворяющую этому уравнению, для которой (*) определяет единственную неявную функцию $y(x)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$, и представить первые три члена разложения $y(x)$ в виде степенного ряда в окрестности точки $x = x_0$.

► Очевидно, что точка $(x_0 = 0, y_0 = 3)$ удовлетворяет уравнению (*), и, кроме того, $\partial F / \partial y = 2xy - 1 \neq 0$ в этой точке. Следовательно, существует единственная (неявная) функция $y(x)$, которая удовлетворяет начальному условию $y(0) = 3$ и превращает уравнение (*) в тождество:

$$xy^2(x) + x^3 - y(x) + 3 \equiv 0. \quad (*')$$

Функцию $y(x)$ в окрестности точки $x = 0$ представим в виде следующего степенного ряда

$$y(x) = a_0 + a_1x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \dots, \quad (**)$$

три первых коэффициента которого необходимо найти. Так как $y(0) = 3$, то из (**) сразу имеем $a_0 = 3$. Продифференцируем тождество (*') :

$$y^2(x) + 2x \cdot y(x) \cdot y'(x) + 3x^2 - y'(x) \equiv 0. \quad (***)$$

С учетом того, что $y'(0) = a_1$ и $y(0) = 3$, получаем при $x = 0$ из тождества (***): $a_1 = 9$. Далее дифференцируем соотношение (***):

$$4y(x)y'(x) + 2x[(y'(x))^2 + y(x)y''(x)] + 6x - y''(x) \equiv 0.$$

Полагаем в этом соотношении $x = 0$ и учитываем, что $y(0) = 3$, $y'(0) = a_1 = 9$, $y''(0) = a_2$. Решая полученное уравнение относительно a_2 , находим: $a_2 = 108$. В результате для неявной функции $y(x)$ получается следующее представление в виде степенного ряда в некоторой окрестности точки $x = 0$:

$$y(x) = 3 + 9x + 54x^2 + \dots \quad \blacktriangleleft \quad (****)$$

Замечание. В данном примере функция $F(x, y)$ имеет настолько простой вид, что уравнение (*) является квадратным уравнением относительно переменной y , которое легко решить:

$$y_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x(3 + x^3)}}{2x},$$

$$y_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x(3 + x^3)}}{2x} = \frac{2(3 + x^3)}{1 + \sqrt{1 - 4x(3 + x^3)}}.$$

Таким образом, уравнение (*) определяет две неявные функции, $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Только одна из них, $y_2(x)$, удовлетворяет начальному условию $y(0) = 3$. Следовательно, именно $y_2(x)$ раскладывается в степенной ряд (****).

Задача 3*. Пусть функция $y(x)$ задана неявным образом уравнением $F(x, y) = 0$ и удовлетворяет условию $y(x_0) = y_0$. Доказать, что такая функция единственна, а также разложить её в ряд Тейлора в некоторой окрестности точки x_0 , где представить все слагаемые этого ряда вплоть до члена, пропорционального $(x - x_0)^2$, если:

- i) $F(x, y) = 2y - x - \operatorname{arctg} y, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0;$
- ii) $F(x, y) = \operatorname{tg} y - 3x - 5y, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0;$
- iii) $F(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 5, \quad x_0 = 4, \quad y_0 = 9;$
- iv) $F(x, y) = y^3 + x^3 - 5x - 4, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 2;$
- v) $F(x, y) = xy^2 - y^3 - 4x + 8, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 2;$
- vi) $F(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y - 4, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 4.$

► Разберем подробно только случай vi). Так как здесь при $x = 0$ и $y = 4$ выполняется $F(x_0 = 0, y_0 = 4) = 0$, а $\partial F / \partial y = 1 \neq 0$, то все условия **Теоремы**, приведенной в начале этого параграфа, выполнены, поэтому неявно заданная функция $y(x)$ единственна.

Разложение этой функции в степенной ряд Тейлора имеет вид (2) с коэффициентами a_k в виде (3). Очевидно, что $a_0 = y_0 = y(0) = 4$.

Для нахождения a_1 дифференцируем тождество

$$F(x, y(x)) = x^4 + x^2y^2(x) + y(x) - 4 \equiv 0.$$

В результате получаем соотношение

$$4x^3 + 2xy^2(x) + 2x^2y(x)y'(x) + y'(x) \equiv 0, \quad (*)$$

в котором полагаем $x = 0$ и $y(0) = 4$ и сразу находим: $a_1 = y'(0) = 0$. Наконец, после дифференцирования тождества (*) получаем

$$12x^2 + 2y^2(x) + 8xy(x)y'(x) + 2x^2(y'(x))^2 + 2x^2y(x)y''(x) + y''(x) \equiv 0.$$

В этом соотношении полагаем $x = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$ и решаем его относительно $y''(0)$. В результате получаем: $a_2 = y''(0) = -32$. Полученных данных достаточно для представления с требуемой точностью ряда Тейлора неявно заданной функции:

$$y(x) = 4 - 16x^2 + \dots \quad \blacktriangleleft$$

8.2 Интегрирование ДУ с помощью степенных рядов

Решение многих дифференциальных уравнений (ДУ) не выражается в виде элементарных функций, и интегрирование этих уравнений не сводится к вычислению конечного числа простых интегралов и производных от известных элементарных функций (в этом случае говорят, что интегрирование ДУ не сводится к квадратурам).

В таких случаях обычно используются приближенные методы интегрирования ДУ. Один из таких методов основан на представлении решения уравнения в виде степенного ряда Тейлора. Сумма конечного числа членов этого ряда будет приближенно равна искомому решению.

Предположим, что нужно решить уравнение

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Решение этой задачи будем искать в виде степенного ряда Тейлора:

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \frac{a_2}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{a_3}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{a_k}{k!}(x - x_0)^k + \dots \quad (2)$$

На практике обычно требуется определить несколько первых слагаемых этого ряда, и, значит, нужно определить несколько первых коэффициентов a_k (чем большее количество коэффициентов a_k ряда (2) будет определено, тем точнее будет найдено решение ДУ (1) в окрестности точки $x = x_0$). Коэффициенты $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ связаны с производными функции $y(x)$ следующим образом:

$$a_0 = y(x_0), \quad a_1 = y'(x_0), \quad a_2 = y''(x_0), \quad a_3 = y'''(x_0), \quad \dots$$

Подставляя в (2) $x = x_0$ и учитывая начальное условие, сразу находим $a_0 = y_0$. Далее, положим в уравнении (1) $x = x_0$ и учтем, что $y'(x_0) = a_1$. В результате получаем, что $a_1 = f(x_0, y_0)$. Продифференцируем соотношение (1), помня, что его правая часть является функцией от двух переменных x и y , причем переменная y , в свою очередь, также зависит от x . В результате получим, что

$$y'' = f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x)) \cdot y'(x). \quad (3)$$

Положим в этом соотношении $x = x_0$ и учтем, что $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = a_1$. Тогда:

$$y''(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot a_1. \quad (4)$$

Аналогично, продифференцировав уравнение (3) и положив в нем $x = x_0$, можно найти коэффициент a_3 в разложении (2), и т.д.

Изложенную выше схему решения ДУ в виде степенного ряда можно использовать и при решении ДУ более высоких порядков.

Задача 1 (тест). Найти первые три члена разложения в степенной ряд решения ДУ $y' = 2y^2 - 3x$ (*) с начальным условием $y(0) = 1$.

► В соответствии с вышесказанным ищем решение в виде ряда

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots \quad (**)$$

Так как по условию задачи $y(0) = 1$, то для окончательного решения задачи требуется найти значения двух первых производных функции $y(x)$ в нуле. Полагая в самом дифференциальном уравнении (*) $x = 0$ и учитывая, что $y(0) = 1$, получаем, что $y'(0) = 2$. Далее дифференцируем уравнение (*) по x :

$$y'' = 4y(x) \cdot y'(x) - 3.$$

Учет того, что $y(0) = 1, y'(0) = 2$, дает значение y'' при $x = 0$: $y''(0) = 5$. В результате окончательное решение задачи мы можем представить в следующем виде:

$$y(x) = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \dots \quad \blacktriangleleft$$

Задача 2 (тест). Решение $y(x)$ дифференциального уравнения удовлетворяет начальному условию $y(0) = 1$. Найти первые три члена разложения $y(x)$ в степенной ряд, если ДУ имеет вид:

- i) $y' = 2x + y^2$, Ответ: $y(x) = 1 + x + 2x^2 + \dots$;
 ii) $y' = x + y$, Ответ: $y(x) = 1 + x + x^2 + \dots$;
 iii) $y' = 2xy + 1$, Ответ: $y(x) = 1 + x + x^2 + \dots$;
 iv) $y' = (3x - 1)y$, Ответ: $y(x) = 1 - x + 2x^2 + \dots$;
 v) $y' = -x + y^2$, Ответ: $y(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$;
 vi) $y' = -4x + y^2$, Ответ: $y(x) = 1 + x - x^2 + \dots$;
 vii) $y' = -6x + y^2$, Ответ: $y(x) = 1 + x - 2x^2 + \dots$;
 viii) $y' = -3x + y^2$, Ответ: $y(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$.

8.3 Суммирование числовых рядов с помощью степенных рядов

Рассмотрим степенные ряды, а также ряды, полученные с помощью их почленного интегрирования или дифференцирования.

Утверждение I [4]. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке $[-a, a]$, $a > 0$, содержащемся в интервале сходимости ряда $(-R, R)$, $R > 0$.

Замечание. Здесь и далее R — радиус сходимости степенного ряда.

Утверждение II [4]. Степенной ряд $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно дифференцировать почленно внутри интервала его сходимости $(-R, R)$. Причем для любого $x \in (-R, R)$ справедливо соотношение

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Утверждение III [4]. Степенной ряд $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ можно почленно интегрировать внутри интервала его сходимости $(-R, R)$. Причем для любого $x \in (-R, R)$ справедливо соотношение

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Широкий круг задач исследуется с помощью разложений функций в ряды Тейлора.¹³ Известно, что на интервале своей сходимости ряд Тейлора функции $f(x)$ совпадает с самой функцией $f(x)$. На этом свойстве рядов Тейлора основан один из методов суммирования

¹³ Определение ряда Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 дано в параграфе 8.1 (см. формулы (2) и (3)).

числовых рядов. Приведем несколько примеров, где будем использовать ряды Тейлора известных элементарных функций.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Известно [4,6], что ее разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ имеет вид:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (1)$$

Интервал сходимости ряда есть $(-\infty, \infty)$. Следовательно, если в равенстве (1) вместо x использовать любое вещественное число $a \in \mathbb{R}$, то для числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ получим значение его суммы, равное e^a .

Пример 2. Пусть $f(x) = \frac{1}{1+x}$, тогда в окрестности точки $x_0 = 0$ ее ряд Тейлора имеет вид [4,6]:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

а его интервал сходимости равен $(-1, 1)$. Используя в этом выражении вместо x любое вещественное число $a \in (-1, 1)$, видим, что сумма числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n$ равна $1/(1+a)$.

Пример 3. Поскольку ряд, рассмотренный в **Примере 2**, сходится равномерно на интервале $(-1, 1)$, то из соотношения (см., **Утверждение III**)

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m},$$

где $x \in (-1, 1)$, следует справедливость следующего равенства

$$\ln(1+x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m}, \quad (2)$$

которое есть не что иное, как представление функции $\ln(1+x)$ в виде ряда Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$, причем интервал сходимости этого ряда есть $(-1, 1)$.

Пример 4. Найти сумму сходящегося ряда $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{2^m}{m \cdot 3^{m+4}}$.

► Выполнив элементарные преобразования, получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{2^m}{m \cdot 3^{m+4}} = \frac{1}{3^4} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{1}{m} \left(\frac{2}{3}\right)^m.$$

Числовой ряд, стоящий в правой части этого равенства, совпадает с рядом Тейлора для функции $\ln(1+x)$ при $x = 2/3$ (см. формулу (2) из предыдущего **Примера 3**), поэтому имеем окончательно

$$\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{2^m}{m \cdot 3^{m+4}} = \frac{1}{3^4} \ln\left(1 + \frac{2}{3}\right).$$

◀

Задача 1*. Найти суммы рядов:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n}{n!}; \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!}; \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n \cdot n!}; \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{n!}; \quad v) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 1}{7^n \cdot n!}.$$

► Суммирование всех предлагаемых числовых рядов основано на разложении функции e^x в ряд Тейлора (см. формулу (1) в **Примере 1**). Рассмотрим в качестве образца случай *iii*). Используя **Утверждение II**, продифференцируем сначала обе части равенства (1), а потом полученное выражение умножим на x . В результате получим:

$$x(e^x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n!}.$$

С этим равенством проделаем еще раз ту же самую процедуру:

$$x(x(e^x)')' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!}. \quad (3)$$

Полагая в (3) $x = 1/2$, мы найдем сумму исходного числового ряда *iii*):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n n!} = \frac{3}{4} e^{1/2}.$$

◀

Задача 2*. С помощью почленного дифференцирования или интегрирования найти суммы рядов:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}; \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}; \quad iii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}; \quad iv) \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n.$$

► Рассмотрим случай *i*). Сумму этого ряда на интервале сходимости $(-1, 1)$ обозначим как $S(x)$, т.е.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Очевидно, что $S(0) = 0$. Теперь, используя **Утверждение II**, продифференцируем обе части этого равенства на интервале сходимости:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \quad (4)$$

При этом, очевидно, выполняется условие $S'(0) = 0$. Соотношение (4) можно еще раз продифференцировать по x :

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Таким образом, для нахождения неизвестной функции $S(x)$ нужно решить простейшее дифференциальное уравнение второго порядка $S''(x) = \frac{x}{1-x}$ с начальными условиями $S(0) = 0$ и $S'(0) = 0$. Это нетрудно сделать, в результате чего имеем:

$$S(x) = x - \frac{x^2}{2} + (1-x) \ln(1-x).$$

◀

Поведение степенного ряда, описанное в условиях **Утверждения I**, можно дополнить следующей теоремой.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = R$, то его сумма сохраняет непрерывность слева и при этом значении x , то есть

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Следствие (Метод Абеля). Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Пример 5. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, который сходится условно. Что можно сказать о его сумме?

► Воспользовавшись результатом, полученным в **Примере 3**, а также методом Абеля, найдем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m} = \ln 2.$$

◀

Пример 6. Рассмотрим условно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$. Что можно сказать о его сумме?

► Воспользовавшись вышеизложенными результатами (**Утверждение III** и метод Абеля), найдем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^m t^{2m} dt = \lim_{x \rightarrow 1-0} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}.$$

◀

Пример 7*. Найти сумму условно сходящегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.

► Воспользуемся методом Абеля, а также возможностью почленного интегрирования степенных рядов:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} x^{4n+1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{4n} dt = \lim_{x \rightarrow 1-0} \int_0^x \frac{dt}{1+t^4}.$$

Найдем значение интеграла. Учет очевидного соотношения

$$t^4 + 1 = (t^2 + \sqrt{2}t + 1)(t^2 - \sqrt{2}t + 1),$$

позволяет представить подинтегральную функцию как

$$\frac{1}{t^4 + 1} = \frac{At + B}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \frac{Ct + D}{t^2 - \sqrt{2}t + 1},$$

где A, B, C, D — неопределенные коэффициенты, которые равны соответственно

$$A = -C = \frac{1}{2\sqrt{2}}; \quad B = D = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\int_0^x \frac{t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} dt - \int_0^x \frac{t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} dt \right].$$

Окончательно найдем, что

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}}{8} \left[\ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) + 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1) \right].$$

Следовательно, сумма исследуемого ряда равна $S = \frac{\sqrt{2}}{8} \left[\ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi \right]$. ◀

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- [1] Шипачев В.С. Высшая математика. М: Высшая школа, 1998. -- 479 с..
- [2] Краснов М.Л. и др. Вся высшая математика. Том 1. М: Эдиториал УРСС, 2000. – 328 с.
- [3] Краснов М.Л. и др. Вся высшая математика. Том 2. М: Эдиториал УРСС, 2000. – 184 с.
- [4] Краснов М.Л. и др. Вся высшая математика. Том 3. М: Эдиториал УРСС, 2000. – 240 с.
- [5] Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть I. М: Высшая школа, 1997. – 304 с.
- [6] Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть II. М: Высшая школа, 1997. – 416 с.